



ABSCHLUSSBERICHT:
Weiterentwicklung und Anwendung des FDEM
(Finite Difference Element Method)
Programmpaketes zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen

Hartwig Leser, Curt Wizemann, Mihai Vulcan
Institut für Umformtechnik
Universität Stuttgart

26. Februar 2004

Das diesem Bericht zugrunde liegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01 IR A16 B gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

Inhaltsverzeichnis

1	Schlussbericht zum Forschungsprojekt Finite Differenzen Elemente Methode (FDEM)	7
1.1	Aufgabenstellung	7
1.2	Voraussetzungen	8
1.3	Planung und Ablauf des Vorhabens	8
1.4	Stand der Technik	8
1.5	Zusammenarbeit mit anderen Stellen	9
2	Differentialgleichungen für die Simulation des einachsigen Zugversuchs	10
2.1	Grundlagen	10
2.2	Elastisches Werkstoffverhalten	11
2.3	Orthotropes Hooke'sches Materialgesetz	12
2.4	Plastische Verformung mit der Vergleichsspannung nach Mises	14
2.4.1	Fließhypothese nach von Mises	14
2.4.2	Fließregeln	14
2.4.3	Strain-Hardening	15
2.5	Formulierung in kartesischen Koordinaten	16
2.5.1	Allgemeines	16
2.5.2	Ebener Spannungszustand	17
2.6	Beschreibung des Strain-Hardening	19
2.6.1	Definition des E-Moduls aus den Fließkurven	20
2.7	Materialparameter	23
2.7.1	Der elastische Fall	23
3	Die Gleichungen für die Simulation des Wellrohres in Zylinderkoordinaten	24
3.1	Grundlagen	24
3.1.1	Elastisches Werkstoffverhalten	27
3.2	Symmetriebetrachtungen	27
3.3	Orthotropes Hooke'sches Materialgesetz	30
3.4	Formulierung der plastischen Verformung in Zylinderkoordinaten	31
3.5	Modifikation der Definition des E-Moduls in Zylinderkoordinaten	33

3.5.1	Definition des E-Moduls aus den Fließkurven	34
3.6	Materialspezifische Eigenschaften	34
3.6.1	Der elastische Fall	34
3.6.2	Die Reibung zwischen Material und Werkzeug	35
4	Der Fertigungsverfahren	37
4.1	Die Werkzeuggeometrie	37
4.2	Der Umformprozess	37
5	Durchgeführte experimentelle Untersuchungen	42
5.1	Der einachsige Zugversuch	42
5.1.1	Messungen zur Beschreibung der Rückfederung	43
5.1.2	Interpretation der Ergebnisse für die Wellrohrsimulation	48
5.2	Der Kreuzzugversuch	49
5.3	Messungen an Wellrohren	49
5.3.1	Gridanalyse an Wellrohren	49
	Literaturverzeichnis	55
6	Erfolgskontrollbericht	57
6.1	Förderpolitische Ziele	57
6.2	Das wissenschaftliche-technische Ergebnis	57
6.3	Fortschreibung des Verwertungsplans	58
6.4	Arbeiten die zu keinem Erfolg führten	58
6.5	Präsentationsmöglichkeiten	58
6.6	Die Ausgaben und Zeitplanung	58

Abbildungsverzeichnis

2.1	Gemessene Spannung-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die x-Richtung (d.h. in Walzrichtung)	21
2.2	Gemessene Spannung-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die y-Richtung (d.h. senkrecht zur Walzrichtung)	22
2.3	Gemessene Spannung-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die xy-Richtung (d.h. 45° zur Walzrichtung)	22
3.1	Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ und dem Ortsvektor \vec{r} . Sowie der neuen Orientierung des Bleches, für die der Zugversuch durchgeführt wurde.	29
3.2	Koordinaten der Zugprobe, wobei die x- und y-Richtungen in der Ebene des Bleches liegen.	29
3.3	Gemessene Spannungs-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die z-Richtung (d.h. in Walzrichtung)	35
3.4	Gemessene Spannungs-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die φ -Richtung (d.h. senkrecht zur Walzrichtung)	36
3.5	Gemessene Spannungs-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die $z\varphi$ -Richtung (d.h. 45° zur Walzrichtung)	36
4.1	Skizze der Anfangsstellung der Scheiben	38
4.2	Skizze einer einzelnen durch den Innenhochdruck ausgeformten Welle	38
4.3	Druckverlauf bei der Herstellung des Wellrohres durch Funktionen angenähert	39
4.4	Beschleunigung und Geschwindigkeit des Werkzeugs bei der Umformung	40
4.5	Skizze der Endstellung der Scheiben vor dem Öffnen des Werkzeugs	41

5.1	Zugprobengeometrie	42
5.2	Fließspannung k_f über der log. Hauptformänderung φ_g	43
5.3	schematisches Spannungs-Dehnungs Diagramm	44
5.4	Kreuzzugprobe	49
5.5	Logarithmische Formänderung während dem Abdichten des Rohres	50
5.6	Logarithmische Formänderungen nach dem Anblasen des Rohres	51
5.7	Verschieben der Dehnungswerte in den $+\varphi/ +\varphi$ - Bereich. Daraus folgt eine Dehnung in axialer und tangentialer Richtung	52
5.8	Entwicklung der Formänderungen auf den Wellenkämmen	53
5.9	Entwicklung der Formänderungen auf den Wellenkämmen und auf den Flanken	54

Tabellenverzeichnis

5.1	Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 10 % igen Vordehnung der Zugprobe	44
5.2	Änderungen der Querkontraktionszahlen und der Schubmoduln, bei einer 10 % igen Vordehnung der Zugprobe	45
5.3	Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 10 % igen Vordehnung der Zugprobe	45
5.4	Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 20 % igen Vordehnung der Zugprobe	45
5.5	Änderungen der Querkontraktionszahlen und der Schubmoduln bei einer 20 % igen Vordehnung der Zugprobe	46
5.6	Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 20 % igen Vordehnung der Zugprobe	46
5.7	Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 30 % igen Vordehnung der Zugprobe	46
5.8	Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 30 % igen Vordehnung der Zugprobe	47
5.9	Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 40 % igen Vordehnung der Zugprobe	47
5.10	Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 40 % igen Vordehnung der Zugprobe	47

Kapitel 1

Schlussbericht zum Forschungsprojekt Finite Differenzen Elemente Methode (FDEM)

Die Möglichkeiten moderner Computersysteme erlaubten in den letzten Jahrzehnten den Einsatz immer anspruchsvollerer und leistungsfähigerer Simulationssoftware.

So wurden mit den Finite-Elemente Programmen den Ingenieuren, Wissenschaftlern und Entwicklern ein Werkzeug gegeben, mit dem sie die Verfahren der Umformtechnik vor der kostenintensiven Herstellung von Maschinen und Werkzeugen mit dem Computer simulieren können. Die Bezeichnung Finite-Elemente Methode stellt ein Verfahren zur numerischen Lösung partieller, nichtlinearer Differentialgleichungen dar. Die FEM kommt immer dann zur Anwendung, wenn die Differentialgleichungen nicht analytisch gelöst werden können. Die FEM ist ein Diskretisierungsverfahren, das eine näherungsweise Lösung der Differentialgleichung liefert.

Zwei weitere Diskretisierungsverfahren sind die Randelementmethode, auf die hier nicht näher eingegangen wird, und die Finite Differenzen Elemente Methode (FDEM), die die Grundlage dieser Forschungsarbeit darstellt. In der FDEM geht man von den Differentialgleichungen aus, die gelöst werden müssen und wandelt diese in Differenzengleichungen um, die man dann unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randbedingungen löst.

1.1 Aufgabenstellung

Die Aufgaben des Instituts für Umformtechnik der Universität Stuttgart am Forschungsprojekt FDEM waren die Bestimmung der Materialeigenschaften des Edelstahl, mit dem eine Zugprobe und ein sogenanntes Wellrohr simuliert werden sollten. Die Simulationen selbst, sollten am Rechenzentrum der Universität Karlsruhe unter Leitung von Prof. Dr. W. Schönauer durchgeführt werden.

Für die numerische Simulation des Zugversuches wurden die partiellen Differentialgleichungen

die die elastische Dehnung und die plastische Verformung in kartesischen (x, y, z) Koordinaten beschreiben, aufgestellt [1].

Damit das Wellrohr simuliert werden konnte, mussten die Differentialgleichungen von den kartesischen Koordinaten in zylindersymmetrische Koordinaten umgeschrieben werden.

Weiterhin waren weitere, umfangreiche Zugversuche nötig, um die Änderung der elastischen Eigenschaften des verwendeten Edelstahls aufgrund der Kaltverfestigung zu untersuchen.

Um die Simulationsergebnisse mit der realen Herstellung des Wellrohres beschreiben zu können, musste der Fertigungsvorgang bzw. das Verfahren des Fertigungsvorganges in eine mathematische Form gebracht werden.

Zum Vergleich von Simulation und Realität wurden Wellrohre in verschiedenen Stadien produziert und die aufgetretenen Formänderungen ermittelt.

1.2 Voraussetzungen

Das Forschungsprojekt "Weiterentwicklung und Anwendung des FDEM (Finite Difference Element Method) Programmpaketes zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen" war eine Gemeinschaftsarbeit des Rechenzentrums Karlsruhe wo das Simulationsprogramm zur Finiten Elemente Differenzen Methode (FDEM) entwickelt wurde [1] und dem Institut für Umformtechnik der Universität Stuttgart.

1.3 Planung und Ablauf des Vorhabens

Das Vorhaben wurde so geplant, dass zuerst ein Materialmodell erarbeitet wurde, mit dem der einachsige Zugversuch simuliert werden sollte. Dazu mussten Gleichungen, die die elastische Dehnung sowie die plastische Verformung beschreiben, formuliert werden. Parallel dazu wurden Messungen zur Bestimmung der benötigten Materialparameter durchgeführt. Mit den Werten aus den simulierten Zugversuchen sollten dann die Simulationen des Wellrohres optimiert werden. Hieran anschließend soll die Innen-Hochdruckumformung eines Wellrohres simuliert werden.

1.4 Stand der Technik

Die Arbeiten am IFU basieren auf der Plastomechanik sowie auf der Elastomechanik und Elastodynamik. Desweiteren wurde auf die Veröffentlichungen D. Banabic [7], [8] Bezug genommen, mit dem auch ein erstes Werkstoffmodell zusammen ausgearbeitet wurde.

1.5 Zusammenarbeit mit anderen Stellen

Zum Einen wurde zu Beginn des Forschungsprojektes mit Herrn Prof. Dr. D. Banabic von der Universtität in Cluji-Napoca (Klausenburg/Rumänien) bezüglich der Berücksichtigung der senkrechten Anisotropie zusammengearbeitet. Die Firma IWKA Regler und Kompensatoren in Karlsruhe / Stutensee, die Wellrohre industriell herstellen wurde in die Diskussion der Forschungsergebnisse einbezogen. Von der Firma IWKA Regler und Kompensatoren in Karlsruhe wurden extra hergestellte einlagige, zusammengeschweißte Rohre an das Institut für Umformtechnik (IFU) gesandt und dort mit Hilfe eines elektrochemischen Verfahrens mit einem Gridmuster versehen. Mit einer bei der IWKA speziell programmierten Maschine, die es ermöglichte, den Umformprozess in jedem beliebigen Stadium zu unterbrechen, wurden dann diese Rohre so umgeformt, dass alle Stadien des Umformprozesses des Wellrohres erfasst werden konnten. Diese wurden am IFU einer Formänderungsanalyse unterzogen. Hiermit läßt sich u. a. der Materialfluss bei der Umformung bestimmen.

Kapitel 2

Differentialgleichungen für die Simulation des einachsigen Zugversuchs

2.1 Grundlagen

Die Bewegungsgleichungen eines elastischen Mediums haben die Form [2]

$$-\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \operatorname{div} \underline{\sigma} + \vec{F} = 0 \quad (2.1)$$

Hierin sind ρ die Massendichte, $\underline{\sigma}$ der Spannungstensor und \vec{F} die äußeren Kräfte pro Volumeneinheit. Der erste Term ist der Newtonsche Trägheitsterm und beschreibt die gesamte Bewegung des Körpers. Die Bewegung wird hier jedoch nicht berücksichtigt. Die Volumenkräfte brauchen auch nicht berücksichtigt werden, da diese in den Randbedingungen der Differentialgleichungen integriert sind. Damit bleibt der einzige zu berücksichtigende Ausdruck $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$. In kartesischen Koordinaten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Zur Beschreibung der Verzerrungen (Dehnungen) wird ein Festkörper in zwei Konfigurationen betrachtet. Den Ort eines Teilchens in der Konfiguration eins beschreibt der Ortsvektor \vec{r} . Der Ortsvektor \vec{r}' sei der Ort des Teilchens in der Konfiguration zwei, das in der Konfiguration eins am Ort \vec{r} war. Somit beschreibt der Vektor $u = \vec{r}' - \vec{r}$ die Verschiebung des Teilchens vom

Zustand eins zum Zustand zwei. Da zu jedem Ort innerhalb des Körpers ein Teilchen gehört, ist $u(\vec{r})$, die Verschiebung aller Teilchen. $u(\vec{r})$ ist normalerweise eine stetige Funktion des Ortes, die als das Vektorfeld der Verschiebung bezeichnet wird. Der Verzerrungstensor (Green'scher Tensor) ergibt sich in seiner nichtlinearen Form durch den Gradienten des Vektorfeldes $u(\vec{r})$ wie folgt [3].

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2.3)$$

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen, der Tensor der Dehnungsgeschwindigkeiten, ergibt sich aus dem Green'schen Verzerrungstensor durch Differentiation nach der Zeit.

$$\dot{\varepsilon}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (2.4)$$

Für kleine Werte der partiellen Ableitungen in (2.4) können die quadratischen Terme von (2.4) vernachlässigt werden und man gelangt zu der sogenannten geometrischen Linearisierung. Diese Gleichungen sind im Abschnitt über elastisches Verhalten angegeben.

In Koordinatendarstellung ergeben sich folgende, exakte Gleichungen:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (2.5)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.7)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad (2.8)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (2.9)$$

$$\dot{\varepsilon}_{yz} = \dot{\varepsilon}_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) + \left[\frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (2.10)$$

2.2 Elastisches Werkstoffverhalten

Zur Beschreibung des elastischen Bereichs der Verformung werden die Gleichungen (2.5)-(2.10) linearisiert, da bei den sehr kleinen Dehnungen im elastischen Bereich die quadratischen Terme vernachlässigt werden können [4].

Elastische Dehnungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.11)$$

bzw.

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (2.14)$$

2.3 Orthotropes Hooke'sches Materialgesetz

Für den elastischen Bereich der Verformung wird weiterhin von einem linearen Materialgesetz ausgegangen. Jedoch wird der Werkstoff nicht mehr als isotrop sondern als orthotropes Material angenommen [9].

Die allgemeinste Form des Hooke'schen Gesetzes lautet:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.15)$$

Der Tensor 4. Stufe c_{ijkl} trägt die Bezeichnung Elastizitätstensor und lässt sich direkt in den Voigtschen Tensor 2. Stufe c_{kl} umschreiben. Um mit den vorherigen und nachfolgenden Gleichungen konsistent zu bleiben, wird hier das inverse Hooke'sche Gesetz in der Voigtschen Formulierung benutzt:

$$\varepsilon_k = \sum_{l=1}^6 c_{kl}^{-1} \sigma_l \quad (2.16)$$

Die inverse Elastizitätsmatrix für den orthotropen Fall lautet

$$c_{kl}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

welche 12 Werkstoffkennwerte enthält, von denen aufgrund der Symmetrie der Matrix nur 9 voneinander linear unabhängig sind. Es gilt:

$$\frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}, \quad \frac{\nu_{xz}}{E_x} = \frac{\nu_{zx}}{E_z}, \quad \frac{\nu_{yz}}{E_y} = \frac{\nu_{zy}}{E_z} \quad (2.18)$$

Nach dem Vereinfachen der Matrix ergeben sich die Gleichungen für die Verschiebungen wie folgt:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_x} \left[\sigma_{xx} - \nu_{xy} \sigma_{yy} - \nu_{xz} \sigma_{zz} \right] \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_y} \left[\sigma_{yy} - \nu_{yz} \sigma_{zz} \right] \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy} + \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} \quad (2.21)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G_{yz}} \sigma_{yz} \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2G_{xz}} \sigma_{xz} \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy} \quad (2.24)$$

Hierin sind G_{ij} die Schubmoduln, ν_{ij} die Querkontraktionszahlen und E_i die Elastizitätskonstanten in den entsprechen Raumrichtungen.

Berücksichtigt man, dass mit der vorliegenden Geometrie des Bauteils ein ebener Spannungszustand herrscht, d.h. dass die Dicke im Vergleich zu den übrigen Maßen gering ist, dann können die Spannungen, sowie die Schubspannungen in Dickenrichtung vernachlässigt werden:

$$\sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (2.25)$$

Damit ergeben sich aus den Gleichungen (2.19)-(2.24) folgende Formeln, die das elastische Verhalten beschreiben.

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E_x} \left[\sigma_{xx} - \nu_{xy} \sigma_{yy} \right]} \quad (2.26)$$

$$\boxed{\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_y} \sigma_{yy}} \quad (2.27)$$

$$\boxed{\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy}} \quad (2.28)$$

$$\boxed{\varepsilon_{yz} = 0} \quad (2.29)$$

$$\boxed{\varepsilon_{xz} = 0} \quad (2.30)$$

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy}} \quad (2.31)$$

2.4 Plastische Verformung mit der Vergleichsspannung nach Mises

2.4.1 Fließhypothese nach von Mises

Wenn σ_{ij} die Spannung ist, die auf einen Körper wirkt, und σ_1, σ_2 und σ_3 die Hauptspannungen sind, dann lautet die Fließhypothese von Mises [6]:

$$\Phi(\sigma_{ij}, \lambda) = \bar{\sigma}' - Y(\lambda) \quad (2.32)$$

wobei $\bar{\sigma}'$ folgendermaßen lautet

$$\bar{\sigma}' = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} \quad (2.33)$$

Für jede plastische Verformung müssen die Spannungen auf der Fließortfläche liegen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_{ij}, \lambda) < 0 & \text{ elastische Verformung} \\ \Phi(\sigma_{ij}, \lambda) = 0 & \text{ plastische Verformung} \end{aligned}$$

Die Gleichung $\bar{\sigma}'$ kann auch direkt durch Terme des Spannungstensors σ_{ij} ausgedrückt werden. Wobei ab hier die Einstein'sche Summenkonvention gilt, die besagt, dass über Terme mit gleichen Indizes summiert wird.

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \quad (2.34)$$

mit

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.35)$$

2.4.2 Fließregeln

Die Fließregeln können folgendermaßen ausgedrückt werden [15]:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.36)$$

bzw.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}} \quad (2.37)$$

mit

$$\Phi(\sigma_{ij}, \lambda) = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} - Y(\lambda) \quad (2.38)$$

λ wird in der Literatur teilweise als "plastischer Multiplikator" bezeichnet.

2.4.3 Strain-Hardening

Die Funktion $Y(\lambda)$ beschreibt das Strain-Hardening und ist gegeben durch (Swift 1948):

$$Y(\lambda) = Y_0 + K(\varepsilon_0 + \lambda)^n \quad (2.39)$$

Hierin ist n der Verfestigungsexponent. Zur Bestimmung von $\dot{\lambda}$ in Gleichung (2.37) bildet man das totale Differential von $\Phi(\sigma_{ij}, \lambda)$ [17]

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.40)$$

wobei gilt

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = -\frac{dY}{d\lambda} = -h(\lambda) \quad (2.41)$$

wobei $h(\lambda)$ der Steigung der Kurve des einachsigen Spannungszustandes entspricht. Somit ergibt sich

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} - h(\lambda) \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (2.42)$$

mit der Beziehung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}} \quad (2.43)$$

ergibt sich schließlich

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \frac{1}{h(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}} \left\{ \frac{3}{2} S_{ij} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right\} \quad (2.44)$$

unter der Bedingung, dass wenn

$$\left\{ \frac{3}{2} S_{ij} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \right\} > 0 \quad (2.45)$$

ist, gilt für

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = \frac{1}{h(\lambda)} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}} \frac{3}{2} S_{ij} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} \quad (2.46)$$

ansonsten ist

$$\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\lambda} = 0 \quad (2.47)$$

Zur Bestimmung des Terms $\frac{d\sigma_{ij}}{dt}$ wird, da gilt $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, z, t)$, das totale Differential von $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$ gebildet

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2.48)$$

In abgekürzter Form lässt sich diese "konvektive Ableitung" auch schreiben als:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad } \sigma_{ij} \quad (2.49)$$

Für den gesamten Term $S_{ij} \frac{d\sigma_{ij}}{dt}$ ergibt sich mit der Summenkonvention:

$$S_{ij} \frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \sum_{ij} \left[S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x} v_x + S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial y} v_y + S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial z} v_z \right] \quad (2.50)$$

Das Gleiche gilt auch für die Ableitung von $d\lambda/dt$ da λ ebenfalls eine Funktion von x, y, z, t ist.

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (2.51)$$

bzw.

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad } \lambda \quad (2.52)$$

Die Bestimmungsgleichung für den plastischen Multiplikator λ ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.34), mit (2.49) und (2.51), eingesetzt in (2.46), zu:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x} v_x + \frac{\partial\lambda}{\partial y} v_y + \frac{\partial\lambda}{\partial z} v_z = \frac{1}{h(\lambda)} \frac{1}{\bar{\sigma}} \frac{3}{2} \sum_{ij} \left[S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} + S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x} v_x + S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial y} v_y + S_{ij} \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial z} v_z \right] \quad (2.53)$$

2.5 Formulierung in kartesischen Koordinaten

2.5.1 Allgemeines

Im kartesischen x, y, z - Koordinatensystem lautet die Vergleichsspannung nach von Mises

$$k_f = \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3\sigma_{xy}^2 + 3\sigma_{xz}^2 + 3\sigma_{yz}^2} \quad (2.54)$$

und für $\dot{\lambda}$ ergibt sich folgender Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{dz}{dt} &= \frac{1}{h(\lambda)} \frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ 3 \left[\sigma_{yz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yz} + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xy} + \sigma_{xz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xz} \right. \right. \\ &+ \frac{2}{3} \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} \\ &- \frac{1}{3} \sigma_{zz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} + \frac{2}{3} \sigma_{zz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} \\ &\left. \left. + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz} + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xy} + \sigma_{xz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xz} + \sigma_{yz} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yz} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} \right) v_x + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yz} \right) v_x - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \right) v_x + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yz} \right) v_x \\
& +\sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \right) v_x - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{zz} \right) v_x - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \right) v_x + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xz} \right) v_x \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yy} \right) v_x + \frac{2}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{zz} \right) v_x + \frac{2}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \right) v_x + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \right) v_x \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yy} \right) v_x - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{zz} \right) v_x + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yy} \right) v_x \\
& + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right) v_y - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{zz} \right) v_y + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} \right) v_y - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xx} \right) v_y \\
& + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xz} \right) v_y + \frac{2}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{zz} \right) v_y + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} \right) v_y + \frac{2}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xx} \right) v_y \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right) v_y - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{zz} \right) v_y + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xz} \right) v_y - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xx} \right) v_y \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right) v_y + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} \right) v_y + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yz} \right) v_y \\
& + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} \right) v_z - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yy} \right) v_z - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yy} \right) v_z + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xy} \right) v_z \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xx} \right) v_z + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yy} \right) v_z - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \right) v_z - \frac{1}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xx} \right) v_z \\
& + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xy} \right) v_z + \frac{2}{3} \sigma_{zz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \right) v_z + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} \right) v_z + \sigma_{xz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} \right) v_z \\
& + \frac{2}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xx} \right) v_z - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} \right) v_z + \sigma_{yz} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} \right) v_z \Big] \quad (2.55)
\end{aligned}$$

2.5.2 Ebener Spannungszustand

Beim ebenen Spannungszustand gilt $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$. Damit ergibt sich für die Fließhypothese nach von Mises

$$k_f = \bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (2.56)$$

sowie folgender Wert für $\dot{\lambda}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} v_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} v_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} v_z = \frac{1}{h(\lambda)} \frac{1}{\bar{\sigma}} \Big\{ & 3 \left[\frac{2}{3} \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xy} \right. \\
& \left. - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xx} + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{yy} + \sigma_{xy} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{xy} \right] \quad (2.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \right) v_x + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \right) v_x + \frac{2}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} \right) v_x \\
& + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xy} \right) v_x - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yy} \right) v_x + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yy} \right) v_x \\
& + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right) v_y + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} \right) v_y + \frac{2}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xx} \right) v_y \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} \right) v_y - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xx} \right) v_y + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} \right) v_y \\
& - \frac{1}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yy} \right) v_z + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xy} \right) v_z - \frac{1}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xx} \right) v_z \\
& + \frac{2}{3} \sigma_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yy} \right) v_z + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xy} \right) v_z + \frac{2}{3} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xx} \right) v_z \Bigg\}
\end{aligned}$$

mit

$$\boxed{h(\lambda) = \frac{dY}{d\lambda} = Kn(\varepsilon_0 + \lambda)^{n-1}} \quad (2.58)$$

und der Beziehung

$$\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij}^2 \quad (2.59)$$

sowie durch das Zusammenfassen einzelner Terme ergibt sich für Gleichung (2.58)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} v_x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} v_y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} v_z &= \frac{1}{Kn(\varepsilon_0 + \lambda)^{n-1}} \frac{1}{2\bar{\sigma}} \\
& \times \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{xx}^2) + \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{yy}^2) + 3 \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{xy}^2) - \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{xx} \sigma_{yy}) \right] \right. \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx}^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{yy}^2) + 3 \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xy}^2) - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} \sigma_{yy}) \right] v_x \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy}^2) + 3 \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xy}^2) - \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{xx} \sigma_{yy}) \right] v_y \\
& \left. + \left[\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xx}^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{yy}^2) + 3 \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xy}^2) - \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{xx} \sigma_{yy}) \right] v_z \right\}
\end{aligned} \quad (2.60)$$

Wobei hier wieder gilt, dass $\dot{\lambda}$ nur dann ungleich Null ist, wenn der Ausdruck zwischen den $\{ \}$ Klammern größer als Null ist.

Es gelten:

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xx}}} \quad (2.61)$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{yy}} \quad (2.62)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xx}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{yy}} \right) \quad (2.63)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{xy}} \quad (2.64)$$

bzw.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}} \quad (2.65)$$

Bei Beachtung, dass $\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}} = \bar{\sigma}$, folgt

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (2.66)$$

Mit den S_{ij} unter den Bedingungen des ebenen Spannungszustandes

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\delta_{ij} \quad (2.67)$$

ergeben sich für die plastische Verformung:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad (2.68)$$

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \quad (2.69)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = -\dot{\lambda} \frac{1}{2\bar{\sigma}} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.70)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\lambda} \frac{3\sigma_{xy}}{2\bar{\sigma}} \quad (2.71)$$

2.6 Beschreibung des Strain-Hardening

Die beste Funktion zur Beschreibung der Kaltverfestigung im Vergleich zu den mit dem Zugversuch gemessenen Werten ergibt sich durch eine Modifikation der Funktion von Swift (1947): ($Y = a + K\bar{\epsilon}^n = K(\bar{\epsilon}_0 + \bar{\epsilon})^n$) mit K als die Spannung, bei der das plastische Fließen einsetzt.

a ist eine Materialkonstante und $\bar{\varepsilon}_0$ die elastische Dehnung. Die ermittelten Funktionen, ausgehend vom isotropen Strain-Hardening Modell nach Swift, auf ein drei-dimensionales Modell lauten:

$$Y_{xx} = A_{xx} + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{xx})^{n_{xx}} \quad (2.72)$$

$$Y_{yy} = A_{yy} + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{yy})^{n_{yy}} \quad (2.73)$$

$$Y_{xy} = A_{xy} + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{xy})^{n_{xy}} \quad (2.74)$$

mit den Werten

$$A_{xx} = 60 \frac{N}{mm^2} \quad A_{yy} = 70 \frac{N}{mm^2} \quad A_{xy} = 30 \frac{N}{mm^2} \quad (2.75)$$

$$K = 175 \frac{N}{mm^2} \quad \varepsilon_0 = 1.02 \quad (2.76)$$

$$n_{xx} = 0.293 \quad n_{yy} = 0.347 \quad n_{xy} = 0.314 \quad (2.77)$$

Diese Funktionen stellen jedoch nur empirische Näherungsfunktionen dar, um die Fließkurven in eine mathematische Form zu bringen.

2.6.1 Definition des E-Moduls aus den Fließkurven

Im linearen Bereich der Spannungs-Dehnungskurve, also bei elastischer Verformung gilt das Hooke'sche Gesetz $\sigma = E\varepsilon$, wobei die Steigung der Geraden durch den Elastizitätsmodul angegeben wird. Berücksichtigt man, dass die plastische Formänderung von Einfluß auf den E-Modul ist, wird eine funktionale Abhängigkeit des E-Moduls von der Dehnung erreicht. Dies muss für alle relevanten Koordinatenachsen durchgeführt werden. Somit ergeben sich für die Elastizitätsmodule $E_i = E_i(\varepsilon_i)$, mit den i als den vorkommenden Koordinaten:

$$E_{xx} = \frac{\partial Y_{xx}}{\partial \varepsilon_{xx}} = K n_{xx} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{xx})^{n_{xx}-1} \quad (2.78)$$

$$E_{yy} = \frac{\partial Y_{yy}}{\partial \varepsilon_{yy}} = K n_{yy} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{yy})^{n_{yy}-1} \quad (2.79)$$

$$E_{xy} = \frac{\partial Y_{xy}}{\partial \varepsilon_{xy}} = K n_{xy} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{xy})^{n_{xy}-1} \quad (2.80)$$

Ab einer Proportionalitätsgrenze σ_p geht die Gerade in einen gekrümmten Kurvenverlauf über, die der Spannung über der Dehnung im Bereich plastischer Formänderung entspricht. Es ist nun möglich, ab σ_p eine Funktion $\sigma = f(\varepsilon)$ anzugeben, die als jeweilige Steigung einen "modifizierten E-Modul" (als Funktion der Dehnung) beinhaltet. Diese konstruierten Elastizitätsmodule gelten nur für die plastische Verformung. In den folgenden drei Abbildungen (2.1, 2.2 und 2.3) sind jeweils die gemessenen Werte aus dem Zugversuch mit den berechneten Werten der Komponenten Y_{xx}, Y_{xy}, Y_{yy} aus der Formel von Swift aufgetragen. Die Ungenauigkeiten, die

etwa ab 40 % Dehnung auftauchen, spielen bei der Simulation des Wellrohres keine Rolle, da die maximale, bei der Umformung auftretende Dehnung nur 43 % beträgt (aus der Gridanalyse gemessene Werte). Damit ist es auch nicht nötig, eine funktionale Abhängigkeit des Verfestigungsexponenten n in Abhängigkeit von ε anzugeben.

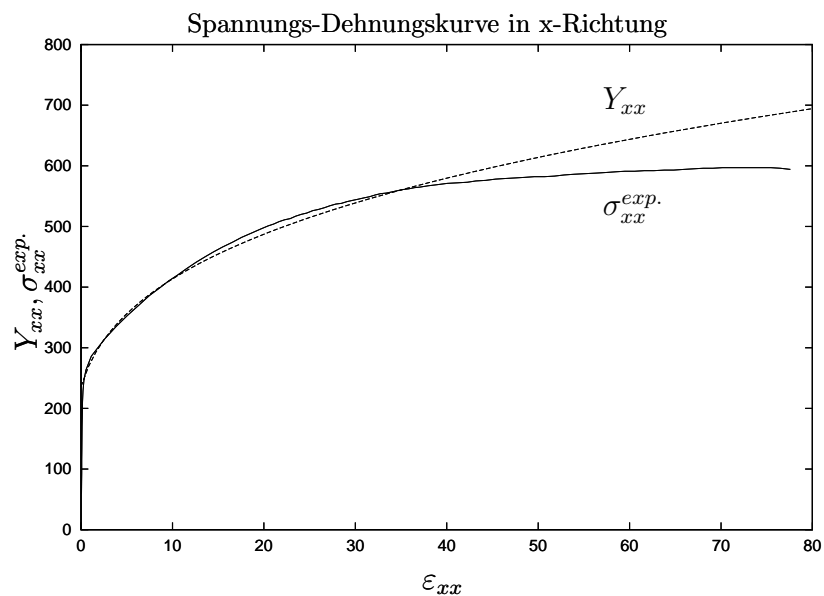


Abbildung 2.1: Gemessene Spannung-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die x-Richtung (d.h. in Walzrichtung)

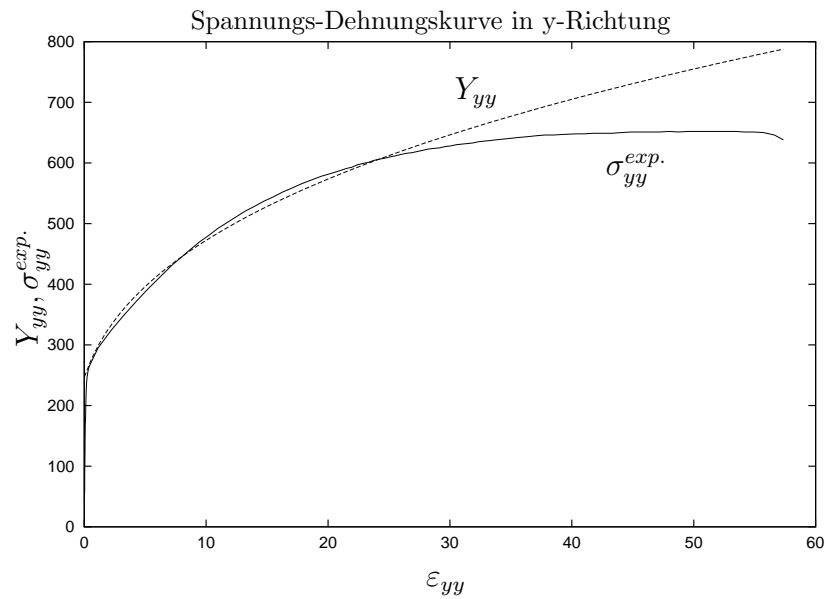


Abbildung 2.2: Gemessene Spannung-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die y-Richtung (d.h. senkrecht zur Walzrichtung)

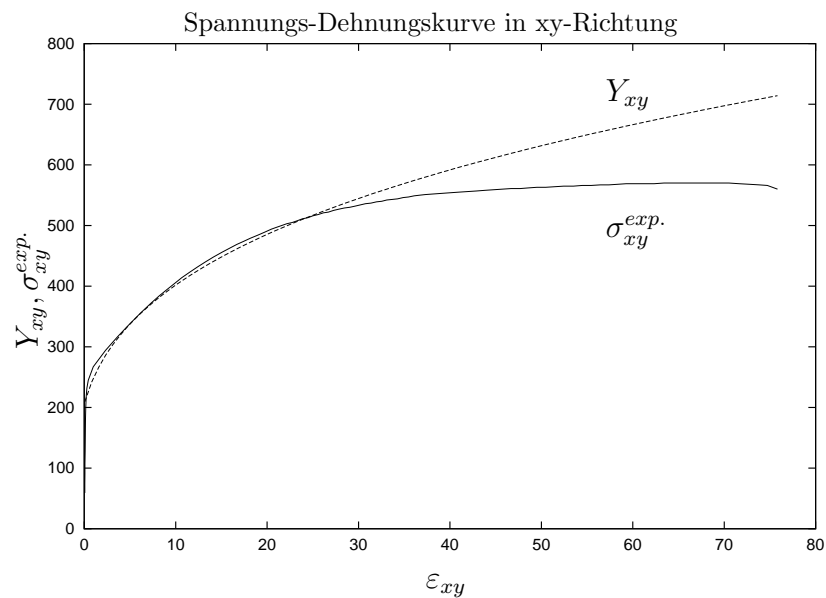


Abbildung 2.3: Gemessene Spannung-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die xy-Richtung (d.h. 45° zur Walzrichtung)

2.7 Materialparameter

2.7.1 Der elastische Fall

Für den elastischen Fall wurden die benötigten Materialparameter mit Hilfe des Zugversuchs ermittelt, bzw. mit den dort ermittelten Messwerten berechnet.

Es ergeben sich folgende Werkstoffkennwerte:

$$E_x = 194121.25 \frac{N}{mm^2} \quad E_y = 193668 \frac{N}{mm^2} \quad (2.81)$$

$$\nu_{xy} = 0.5055482 \quad \nu_{xz} = 0.4937024 \quad \nu_{yz} = 0.4203272 \quad (2.82)$$

$$G_{xy} = \frac{(E_x + E_y)}{4(1 + \nu_{xy})} = 64393.36 \frac{N}{mm^2} \quad (2.83)$$

Kapitel 3

Die Gleichungen für die Simulation des Wellrohres in Zylinderkoordinaten

3.1 Grundlagen

Allgemeines: Als Bezeichnung für die Zylinderkoordinaten werden r, φ und z gewählt. Die Komponenten des Spannungstensors und des Verzerrungstensors (Dehnungstensors) lauten wie folgt.

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\varphi} & \varepsilon_{\varphi z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\varphi} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

In Zylinderkoordinaten lautet der vektorielle Differentialoperator Divergenz folgendermaßen:

$$\operatorname{div} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.3)$$

Daraus ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen $\operatorname{div} \underline{\sigma} = 0$ [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Der Greensche Verzerrungstensor in koordinatenfreier Schreibweise lautet:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T) + \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{u})^T \text{grad } \vec{u} \quad (3.5)$$

Wobei $\text{grad } \vec{u}$ ein Tensor 2. Stufe ist, der nicht mehr symmetrisch ist, da er das dyadische Produkt von dem Gradienten in Zylinderkoordinaten und dem Vektor des Verschiebungsfeldes ist.

$$\text{grad } \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Der Tensor $(\text{grad } \vec{u})^T$ ist der transponierte Tensor zu $\text{grad } \vec{u}$, d. h. er ergibt sich durch Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

$$(\text{grad } \vec{u})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Die Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors ergeben sich durch Einsetzen von (3.6) und (3.7) in (3.5) zu:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right)^2 \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_r \partial u_\varphi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) + \frac{\partial u_r \partial u_\varphi}{\partial z^2} \right] \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r \partial u_z}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r \partial u_z}{\partial z^2} \right] \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_\varphi \partial u_z}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi \partial u_z}{\partial z^2} \right] \quad (3.13)$$

Die zeitliche Ableitung des Verzerrungstensors zur Bestimmung der Verformungsgeschwindigkeiten ergibt sich dann zu

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \text{grad } \vec{u} + \frac{d}{dt} (\text{grad } \vec{u})^T + \frac{d}{dt} (\text{grad } \vec{u})^T \text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \frac{d}{dt} \text{grad } \vec{u} \right] \quad (3.14)$$

Die Komponenten dieses Tensors 2. Stufe in den zylindersymmetrischen Koordinaten ergeben sich wie folgt.

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} &= \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{r\varphi} = \dot{\epsilon}_{\varphi r} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right. \\ &+ \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \\ &\left. + \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rz} = \dot{\epsilon}_{zr} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right. \\ &+ \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{u_\varphi}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \\ &\left. - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\dot{\epsilon}_{\varphi z} = \dot{\epsilon}_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \\
& - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial t} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

3.1.1 Elastisches Werkstoffverhalten

Zur Beschreibung des elastischen Bereichs der Verformung werden die statischen Gleichungen linearisiert, da bei den sehr kleinen Dehnungen im elastischen Bereich die quadratischen Terme vernachlässigt werden können. In zylindersymmetrischen, orthogonalen Koordinaten lautet der linearisierte Teil des Dehnungstensor wie folgt:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T) \tag{3.21}$$

mit den Definitionen (3.6) bzw. (3.7) für den Gradienten ergeben sich die einzelnen Komponenten des Dehnungstensors zu

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{3.22}$$

bzw.

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \tag{3.23}$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \tag{3.24}$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right) \tag{3.25}$$

3.2 Symmetriebetrachtungen

Aufgrund der Rotationssymmetrie des Wellrohres verschwinden alle Terme die $\frac{\partial}{\partial \varphi}$, sowie u_φ und v_φ enthalten. Die Gleichungen für den nichtlinearen Greenschen Verzerrungstensors ergeben sich nach den Gleichungen (3.8) - (3.13) zu:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \right] \tag{3.26}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{u_r^2}{r^2} \tag{3.27}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3.28)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = 0 \quad (3.29)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{z\varphi} = 0 \quad (3.31)$$

Damit ergeben sich die Gleichungen für die Komponenten des Tensors der Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}$ zu:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (3.32)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{u_r}{r} \left(\frac{v_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \quad (3.33)$$

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.34)$$

$$\dot{\varepsilon}_{r\varphi} = \dot{\varepsilon}_{\varphi r} = 0 \quad (3.35)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\varepsilon}_{zr} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \quad (3.36)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi z} = \dot{\varepsilon}_{z\varphi} = 0 \quad (3.37)$$

Ganz analog ergeben sich die Beziehungen für den elastischen Fall

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.38)$$

bzw.

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = 0 \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.40)$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{z\varphi} = 0 \quad (3.41)$$

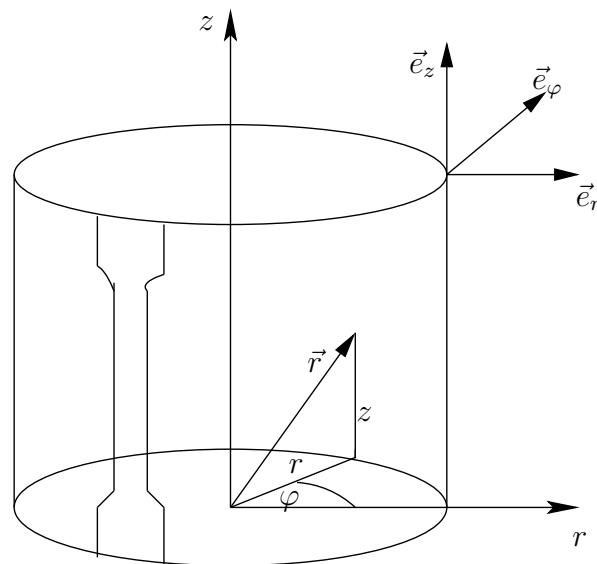


Abbildung 3.1: Zylinderkoordinaten mit den Einheitsvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_φ , \vec{e}_z und dem Ortsvektor \vec{r} .
Sowie der neuen Orientierung des Bleches, für die der Zugversuch durchgeführt wurde.

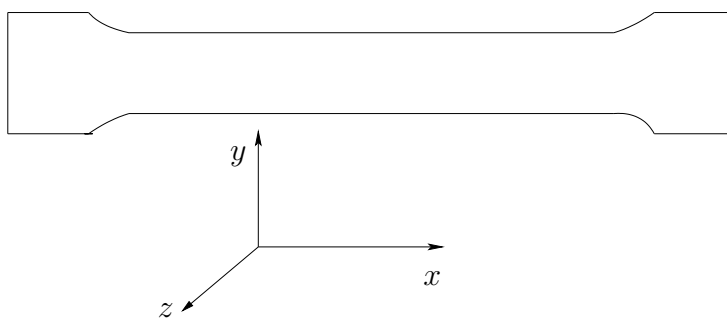


Abbildung 3.2: Koordinaten der Zugprobe, wobei die x - und y -Richtungen in der Ebene des Bleches liegen.

3.3 Orthotropes Hooke'sches Materialgesetz

Zur Beschreibung der linearen Verformung müssen die Materialgleichungen in die zylindersymmetrischen Koordinaten umformuliert werden. Das bedeutet, dass die Koordinatenachsen sich ändern. Aus der ursprünglichen x-Achse wird in den Zylinderkoordinaten die z-Achse, wenn wir betrachten, dass die ursprüngliche Zugprobe auf der Oberfläche des Zylinders parallel zur z-Achse orientiert ist. (Zur Veranschaulichung dienen die Abbildungen 3.1 und 3.2). Die alte y-Richtung ändert sich in die φ -Richtung, d.h. durch den Einheitsvektor tangential an dem Zylinder. Die ursprüngliche z-Richtung, die die Dicke des Bleches beschreibt, geht über in die r-Richtung.

Zur Beschreibung des elastischen Bereichs der Verformung wird weiterhin von einem linearen Materialgesetz ausgegangen. Betrachtet man den Werkstoff weiter als orthotropes Material so lautet die . Die allgemeinste Form des Hooke'schen Gesetzes in koordinatenfreier Schreibweise

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.42)$$

Das inverse Hooke'sche Gesetz in der Voigtschen Formulierung ergibt sich unverändert zu:

$$\varepsilon_k = \sum_{l=1}^6 c_{kl}^{-1} \sigma_l \quad (3.43)$$

Damit ergeben sich, unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie des Wellrohres folgende Spannungs-Dehnungs Beziehungen:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E_z} [\sigma_{zz} - \nu_{\varphi z} \sigma_{\varphi\varphi} - \nu_{zr} \sigma_{rr}] \quad (3.44)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{\nu_{\varphi z}}{E_z} \sigma_{zz} + \frac{1}{E_\varphi} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu_{\varphi r} \sigma_{rr}] \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{rr} = -\frac{\nu_{zr}}{E_z} \sigma_{zz} - \frac{\nu_{\varphi z}}{E_\varphi} \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{1}{E_r} \sigma_{rr} \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2G_{rz}} \sigma_{rz} \quad (3.47)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0 \quad (3.48)$$

Aufgrund der vorhergehenden Symmetriebetrachtungen, bei denen $\varepsilon_{r\varphi} = 0$ und $\varepsilon_{\varphi z} = 0$ sind, folgt aus (3.48), dass $\sigma_{r\varphi} = 0$ und $\sigma_{\varphi z} = 0$ sind.

3.4 Formulierung der plastischen Verformung in Zylinderkoordinaten

Wenn nun die Gleichungen, die in Abschnitt 1.4 hergeleitet, und in koordinatenfreier Schreibweise formuliert wurden, in Zylinderkoordinaten geschrieben werden, dann ergeben sich zur Beschreibung der plastischen Verformung des Wellrohres nachfolgende Gleichungen.

In Zylinderkoordinaten r, φ, z und der rotationsymmetrischen Anordnung, wobei gilt $\sigma_{z\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0$, lautet die Vergleichsspannung $\bar{\sigma}$ nach von Mises

$$\bar{\sigma} = \left\{ \frac{1}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2] + 3\sigma_{rz}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.49)$$

bzw.

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{rr} + 3\sigma_{rz}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.50)$$

wobei alle auftretenden Spannungen $\neq 0$ berücksichtigt sind.

Für die Berechnung des plastischen Multiplikators λ ist es nötig, den Gradienten sowie den Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten anzugeben, um mit Gleichung (2.52) die totale Zeitableitung von λ berechnen zu können.

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \quad (3.51)$$

$$\text{grad} := \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.52)$$

Die totale Zeitableitung oder auch konvektive Ableitung von λ lautet hiermit

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3.53)$$

Aufgrund der Symmetriebetrachtungen in Abschnitt 2.2, bei der alle Ableitungen nach φ verschwinden und wenn man die Geschwindigkeitskomponenten einführt, ergibt sich

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial r} v_r + \frac{\partial\lambda}{\partial z} v_z \quad (3.54)$$

Mit

$$h(\lambda) = \frac{dY}{d\lambda} = Kn(\varepsilon_0 + \lambda)^{n-1} \quad (3.55)$$

und der Beziehung

$$\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} \right) \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij}^2 \quad (3.56)$$

sowie durch Zusammenfassung einzelner Terme ergibt sich für das totale Differential von λ

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} v_r + \frac{\partial \lambda}{\partial z} v_z = \frac{1}{h(\lambda)} \frac{1}{2\bar{\sigma}} \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rr}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\varphi\varphi}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{zz}^2 \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{rz}^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{rr} \sigma_{zz}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{\varphi\varphi} \sigma_{zz}) \right) \right] \right. \\ & + \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rr}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \sigma_{\varphi\varphi}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \sigma_{zz}^2 \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial r} \sigma_{rz}^2 \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{rr} \sigma_{zz}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_{\varphi\varphi} \sigma_{zz}) \right) \right] v_r \\ & + \left[\left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rr}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\varphi\varphi}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}^2 \right) + 3 \left(\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz}^2 \right) \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{rr} \sigma_{zz}) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{\varphi\varphi} \sigma_{zz}) \right) \right] v_z \right\} \quad (3.57) \end{aligned}$$

Wobei hier wieder gilt, dass diese Gleichung nur dann ungleich Null ist, wenn der Ausdruck zwischen den $\{\}$ Klammern größer als Null ist.

Die benötigten Fließregeln ergeben sich zu

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{zz}} \quad (3.58)$$

$$\dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}} \quad (3.59)$$

$$\dot{\epsilon}_{rr} = -\dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{zz}} \right) \quad (3.60)$$

$$\dot{\epsilon}_{rz} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rz}} \quad (3.61)$$

bzw.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}} \quad (3.62)$$

oder wenn man betrachtet, dass $\sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}} = \bar{\sigma}$ folgt

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (3.63)$$

Mit den S_{ij}

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{zz} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})\delta_{ij} \quad (3.64)$$

ergeben sich die plastischen Fließregeln zu

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_{zz} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \quad (3.65)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} - \sigma_{rr}) \quad (3.66)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \dot{\lambda} \frac{1}{2\bar{\sigma}} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}) \quad (3.67)$$

$$\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\lambda} \frac{3\sigma_{rz}}{2\bar{\sigma}} \quad (3.68)$$

3.5 Modifikation der Definition des E-Moduls in Zylinderkoordinaten

Die zur Beschreibung der Kalt-Verfestigung benutzten Funktionen lauten:

$$Y_{zz} = A_{zz} + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{zz})^{n_{zz}} \quad (3.69)$$

$$Y_{\varphi\varphi} = A_{\varphi\varphi} + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{\varphi\varphi})^{n_{\varphi\varphi}} \quad (3.70)$$

$$Y_{z\varphi} = A_{z\varphi} + K(\varepsilon_0 + \varepsilon_{z\varphi})^{n_{z\varphi}} \quad (3.71)$$

mit den Werten, die gleich denen in kartesischen Koordinaten sind. Wobei nur die Koordinatenachsen gedreht wurden.

$$A_{zz} = 60 \frac{N}{mm^2} \quad A_{\varphi\varphi} = 70 \frac{N}{mm^2} \quad A_{z\varphi} = 30 \frac{N}{mm^2} \quad (3.72)$$

$$K = 175 \frac{N}{mm^2} \quad \varepsilon_0 = 1.02 \quad (3.73)$$

$$n_{zz} = 0.293 \quad n_{\varphi\varphi} = 0.347 \quad n_{z\varphi} = 0.314 \quad (3.74)$$

Diese Funktionen stellen jedoch nur empirische Näherungsfunktionen dar, um die Fließkurven in eine mathematische Form zu bringen.

3.5.1 Definition des E-Moduls aus den Fließkurven

Im linearen Bereich der Fließkurve gilt das Hooke'sche Gesetz $\sigma = E\varepsilon$, wobei die Steigung der Geraden dem Elastizitätsmodul entspricht. Unter der Annahme, dass sich für den plastischen Bereich der Fließkurve ein modifizierter E-Modul aus der Steigung der Fließkurve konstruieren lässt, wird damit eine funktionale Abhängigkeit des E-Moduls von der Dehnung erreicht. Dies muss für alle relevanten Koordinatenachsen durchgeführt werden. Somit ergeben sich für die "modifizierten Elastizitätsmodule" $E_i = E_i(\varepsilon_i)$, mit den i als den vorkommenden Koordinaten:

$$E_{zz} = \frac{\partial Y_{zz}}{\partial \varepsilon_{zz}} = Kn_{zz} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{zz})^{n_{zz}-1} \quad (3.75)$$

$$E_{\varphi\varphi} = \frac{\partial Y_{\varphi\varphi}}{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}} = Kn_{\varphi\varphi} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{\varphi\varphi})^{n_{\varphi\varphi}-1} \quad (3.76)$$

$$E_{z\varphi} = \frac{\partial Y_{z\varphi}}{\partial \varepsilon_{z\varphi}} = Kn_{z\varphi} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{z\varphi})^{n_{z\varphi}-1} \quad (3.77)$$

Diese konstruierten Elastizitätsmodule gelten nur für die plastische Verformung. Für die plastische Verformung in Zylinderkoordinaten ist noch der E -Modul in die Dickenrichtung, d.h. in rr -Richtung nötig. Da dieser Wert bei einer Blechstärke von 0,2 mm nicht gemessen werden kann, es aber ebenfalls eine Änderung in der Dickenrichtung gibt, sollte dafür ebenfalls eine Funktion der Form

$$E_{rr} = Kn_{rr} (\varepsilon_0 + \varepsilon_{rr})^{n_{rr}-1} \quad (3.78)$$

benutzt werden. Wegen fehlender Spannungs-Dehnungskurve können jedoch keine Parameter angegeben werden. Die Parameter können nur über die numerische Simulation bestimmt werden. In den folgenden 3 Abbildungen sind jeweils die gemessenen Werte aus dem Zugversuch mit den berechneten Werten der Komponenten $Y_{zz}, Y_{z\varphi}, Y_{\varphi\varphi}$ aus der Formel von Swift aufgetragen. Die Ungenauigkeiten, die ab 40 % etwa auftauchen, spielen bei der Simulation des Wellrohres keine Rolle, da die maximale, bei der Umformung, auftretende Dehnung nur 43 % beträgt (aus der Gridanalyse gemessene Werte). Damit ist es auch nicht nötig eine funktionale Abhängigkeit des Verfestigungsexponenten n in Abhängigkeit von ε anzugeben.

3.6 Materialspezifische Eigenschaften

3.6.1 Der elastische Fall

Die Materialparameter sind dieselben wie beim Zugversuch im elastischen Fall, nur dass die Orientierungen sich geändert haben. D. h. E_z entspricht dem ehemaligen E_x , wie auch in Abbildung 3.1 ersichtlich ist. Ganz analog ergeben sich die anderen Werte.

$$E_r = 194121.25 \frac{N}{mm^2} \quad E_z = 194121.25 \frac{N}{mm^2} \quad E_\varphi = 193668 \frac{N}{mm^2} \quad (3.79)$$

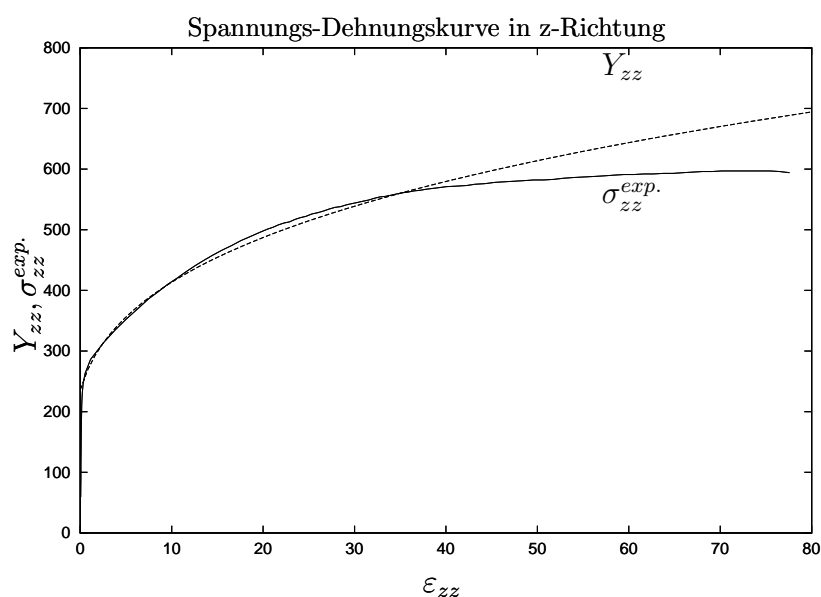


Abbildung 3.3: Gemessene Spannungs-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die z -Richtung (d.h. in Walzrichtung)

$$\nu_{z\varphi} = 0.5055482 \quad \nu_{zr} = 0.4937024 \quad \nu_{\varphi r} = 0.4203272 \quad (3.80)$$

$$G_{rz} = \frac{(E_r + E_z)}{4(1 + \nu_{rz})} = 64904.035 \frac{N}{mm^2} \quad (3.81)$$

3.6.2 Die Reibung zwischen Material und Werkzeug

Die Reibung zwischen Material und Werkzeug wird in Haftreibung und Gleitreibung unterschieden.

$$\text{Haftreibung} \quad F_H = m_H F_N$$

$$\text{Gleitreibung} \quad F_G = m_G F_N$$

wobei m_H der Haftreibungskoeffizient und m_G der Gleitreibungskoeffizient sind. F_N ist die Normalkraft. Die Reibungskoeffizienten ergeben sich für Stahl auf Stahl mit einem Ölfilm zu ca.: $m_H = 0,08$ und $m_G = 0,06$.

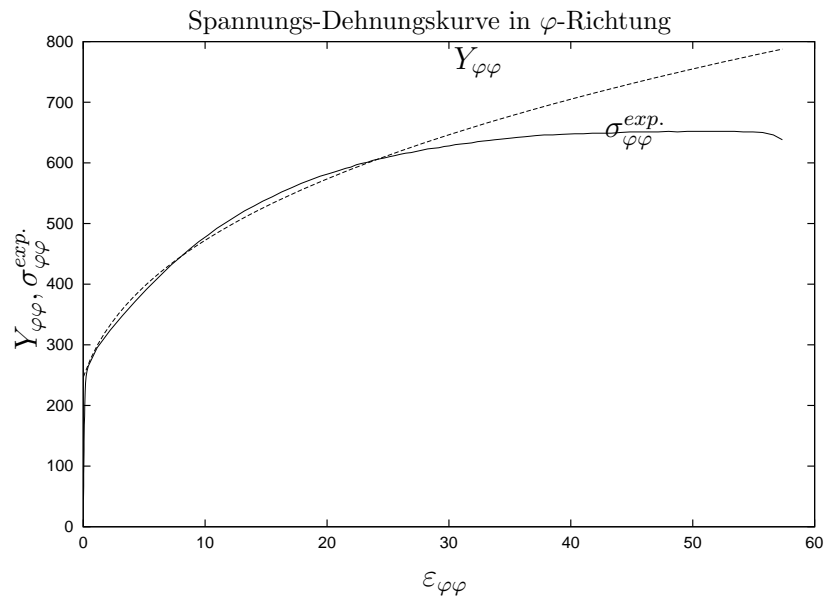


Abbildung 3.4: Gemessene Spannungs-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die φ -Richtung (d.h. senkrecht zur Walzrichtung)

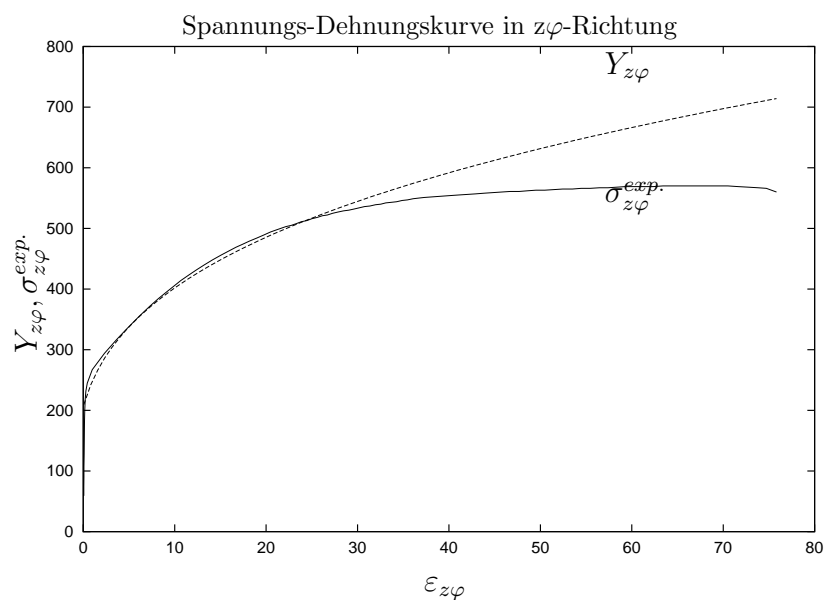


Abbildung 3.5: Gemessene Spannungs-Dehnungs Kurve (durchgezogene Linie) und Kurve nach dem Modell des Strain-Hardening nach Swift (gestrichelte Linie) für die $z\varphi$ -Richtung (d.h. 45° zur Walzrichtung)

Kapitel 4

Der Fertigungsvorgang

In diesem Kapitel wird die Fertigung des Wellrohres beschrieben, die zur korrekten Beschreibung der Simulation benötigt wird. Aus Gründen der Geheimhaltung von produktionsrelevanten Parametern können jedoch keine exakten Werte angegeben werden, sondern nur skizzenhafte Darstellungen veröffentlicht werden.

4.1 Die Werkzeuggeometrie

Die Geometrie des Werkzeuges ist hauptsächlich durch die Geometrie der Scheiben bedingt, die die einzelnen Wellen voneinander abtrennen [16]. In Abbildung 4.1 ist eine Querschnittsskizze von zwei Scheiben und dem Blech zu sehen, bevor der Umformvorgang beginnt.

4.2 Der Umformprozess

Der Prozess zur Herstellung des Wellrohres läuft folgendermaßen ab:

Nach dem Einspannen des Rohres in die Maschine, d. h. nach dem Abdichten des Rohres, wird dieses mit Wasser gefüllt. Nach vollständiger Füllung wird ein hydrostatischer Druck aufgebaut der das Rohr an die Unterseite der Scheiben presst und dann eine kleine Wölbung an den Stellen erzeugt, an denen das Rohr frei liegt, wie in Abbildung 4.2 dargestellt.

Zur numerischen Beschreibung des Druckaufbaus wurde der real gemessene Druckverlauf durch analytische Funktionen dargestellt. Dabei gelten für die Funktionen folgende Gleichungen und Wertebereiche

$$p_1(t) = 21.5 (t - 0.04)^{1.2} \sin(5.58 t) \quad 0 \leq t \leq 0.396 \quad (4.1)$$

$$p_2(t) = -0.21(t - 1.6)^2 + 5.3 \quad 0.396 < t \leq 2.826 \quad (4.2)$$

$$p_3(t) = \exp(-15t + 44) \quad 2.826 \leq t \quad (4.3)$$

Die Darstellung des Druckverlaufs über analytische Funktionen ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

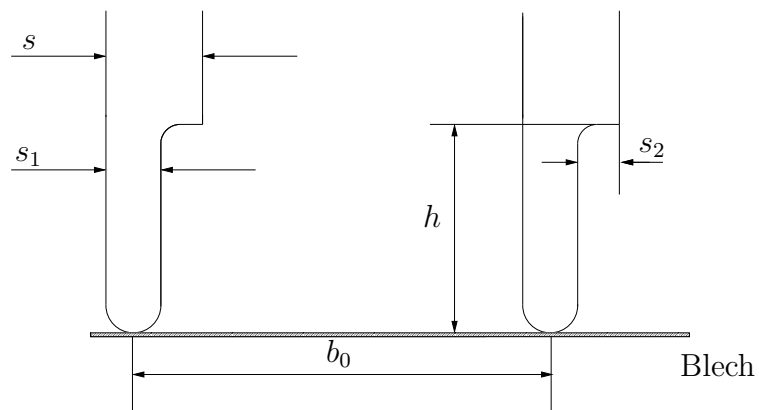


Abbildung 4.1: Skizze der Anfangsstellung der Scheiben

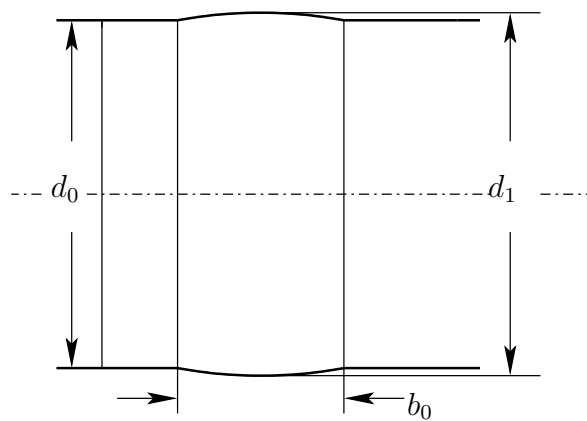


Abbildung 4.2: Skizze einer einzelnen durch den Innenhochdruck ausgeformten Welle

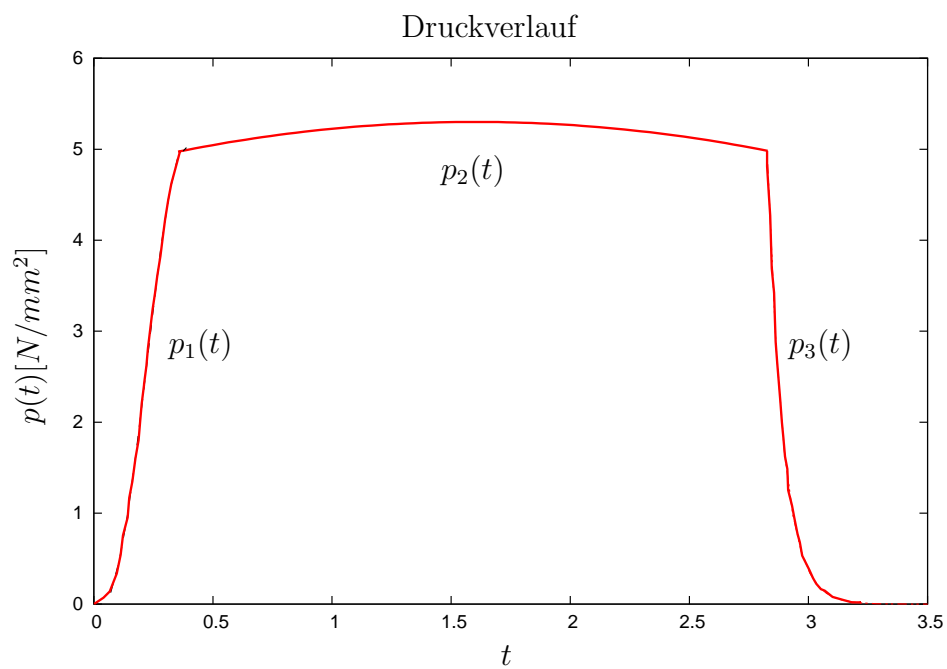


Abbildung 4.3: Druckverlauf bei der Herstellung des Wellrohres durch Funktionen angenähert

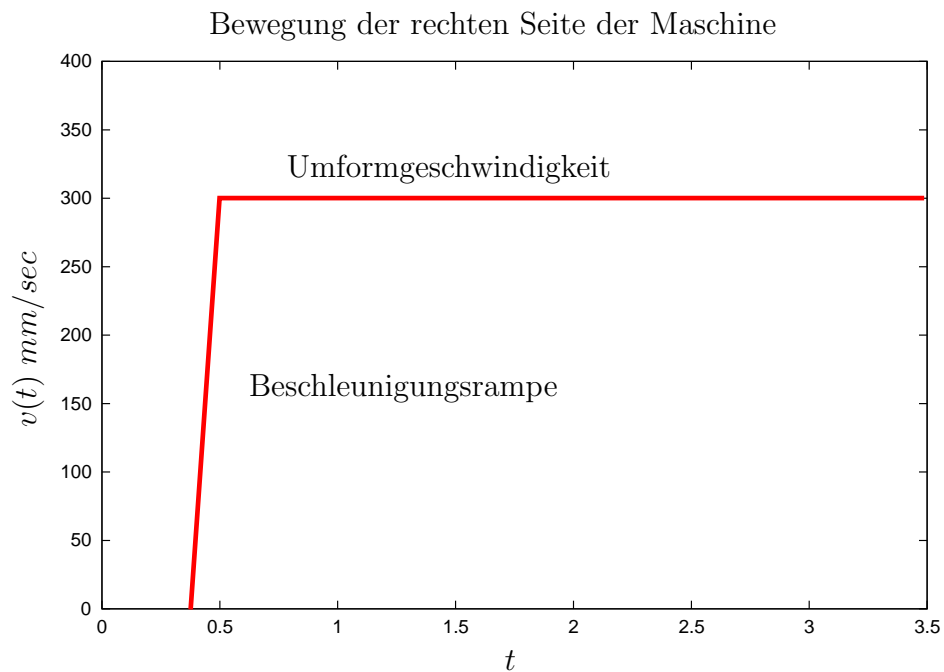


Abbildung 4.4: Beschleunigung und Geschwindigkeit des Werkzeugs bei der Umformung

Nach dem Druckaufbau und dem Aufweiten des Rohres in den frei liegenden Bereichen fährt das Werkzeug, mit der in Abbildung 4.4 dargestellten Geschwindigkeit von einer Seite her aus zusammen und formt damit die einzelnen Wellen aus. Wenn das Werkzeug vollständig zusammengefahren ist und die Scheiben aufeinanderliegen, ist die in Abbildung 4.5 dargestellte Situation gegeben. Nach Öffnen des Werkzeugs und Entnahme des Werkstücks ist der Umformprozess beendet. Für die Simulation des Wellrohres muss die ausführlich in Kapitel 5 beschriebene Rückfederung des Werkstücks bei der Entnahme aus dem Werkzeug noch berücksichtigt werden.

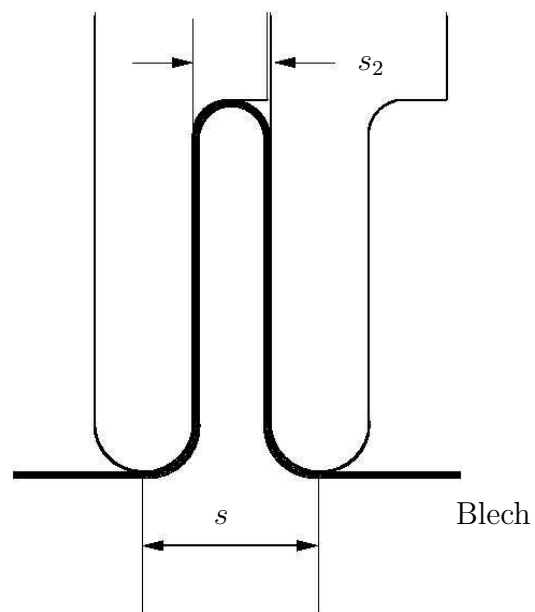


Abbildung 4.5: Skizze der Endstellung der Scheiben vor dem Öffnen des Werkzeugs

Kapitel 5

Durchgeführte experimentelle Untersuchungen

Die experimentellen Untersuchungen gliedern sich in zwei Teile. Dies sind zum einen der einachsige Zugversuch, der die wichtigsten Materialparameter liefert. Daraus werden dann die benötigten Werte, die es erlauben, die numerischen Ergebnisse zu verifizieren, berechnet. Zum anderen ist es der Kreuzzugversuch, der die Werte liefert, die einen Vergleich mit dem simulierten Kreuzzugversuch erlauben.

5.1 Der einachsige Zugversuch

Mit dem einachsigen Zugversuch, werden die Materialkennwerte in den verschiedenen Lagen des Bleches ermittelt. In Abbildung 5.1 ist die Geometrie einer Zugprobe, die aus einem gewalzten Blech ausgeschnitten wurde, zu sehen. Nun hängen die gemessenen Materialpara-

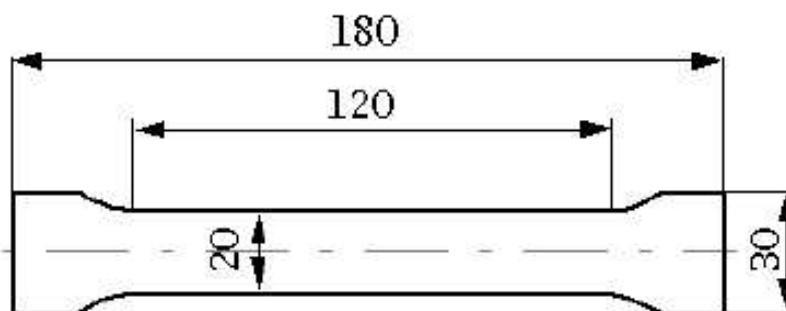


Abbildung 5.1: Zugprobengeometrie

meter von der Orientierung der Zugprobe ab, d.h. wie sie aus dem Blech geschnitten worden ist. Ob in Walzrichtung (0°), senkrecht dazu (90°) oder in 45° - Richtung. Die gemessenen bzw.

errechneten Werte aus dem Zugversuch sind die Zugfestigkeiten, die Streckgrenzen die Elastizitätsmoduln und die Querkontraktionszahlen. Ferner werden im Zugversuch die Fließkurven aufgenommen. In Abbildung 5.2, ist für den Werkstoff 1.4541 die Fließspannung über der log. Formänderung (Fließkurve) aufgetragen. Diese ist nach Tresca gleich der Hauptformänderung φ_g wobei hier die Formänderung der Längenänderung entspricht.

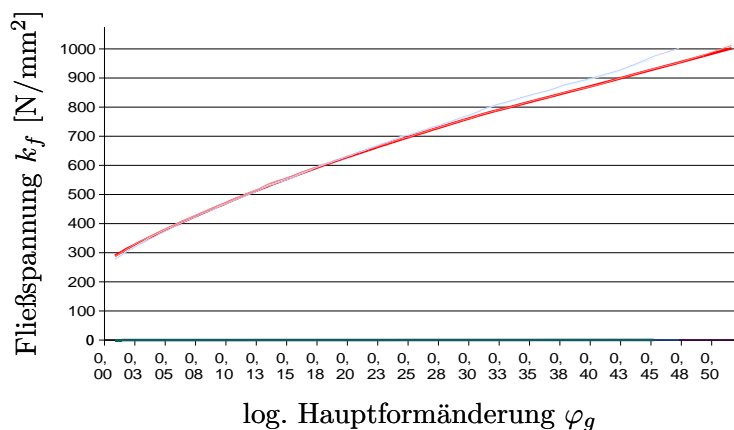


Abbildung 5.2: Fließspannung k_f über der log. Hauptformänderung φ_g

Abbildung 5.3 stellt ein schematisches Spannungs-Dehnungs Diagramm dar, in dem alle relevanten und auch gemessenen Materialparameter aufgeführt sind [10].

5.1.1 Messungen zur Beschreibung der Rückfederung

Die Rückfederung ist das elastische Verhalten des Werkstücks, wenn das Werkzeug nach der Umformung geöffnet wird. Um die Rückfederung beschreiben zu können, muss bekannt sein, ob sich der E-Modul sowie die Querkontraktionszahlen ν_{ij} durch eine vorherige Umformung mit Kaltverfestigung verändern und wenn ja, in welchem Maße.

Bei Kenntnis des E-Moduls kann beschrieben werden, wie die Spannungs-Dehnungs Kurve von der maximal erreichten Spannung wieder auf Null zurück läuft und welche bleibende Dehnung danach vorliegt. Diese Restdehnung ist abhängig von der Steigung der Hooke'schen Geraden und durch die Querkontraktionszahlen.

Zur Bestimmung der Änderungen des E-Moduls und der Querkontraktionszahlen, mit der bleibenden Formänderung bzw. mit der Kaltverfestigung, sowie weiterer Materialparameter, wurden weitere Zugversuche durchgeführt.

Dabei wurden Zugproben um 10 %, 20 %, 30 % und 40 % gedehnt, wobei der E-Modul und die Querkontraktionszahlen ν_{ij}

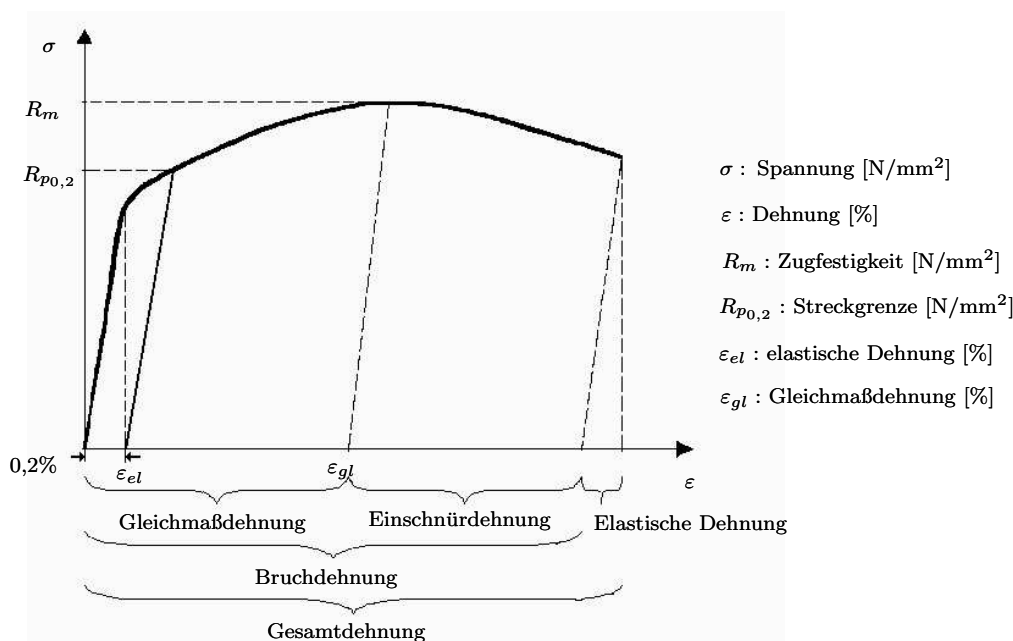


Abbildung 5.3: schematisches Spannungs-Dehnungs Diagramm

bestimmt wurden, dann wurde die Probe aus der Zugprüfmaschine genommen und neu vermessen, d.h. die Dicken- und die Breitenänderung wurden bestimmt. Mit derselben Probe wurde dann noch ein Zugversuch durchgeführt, wobei wiederum der E-Modul und die Querkontraktionszahlen bestimmt wurden.

Die Ergebnisse dieser Versuche sind in den folgenden Tabellen aufgeführt.

Vers.	Walzrichtung	E-modul [$\frac{N}{mm^2}$]	E-Modul 10 % [$\frac{N}{mm^2}$]	Diff. [$\frac{N}{mm^2}$]	% Änd.
1	0°	176449	150870	25579	14.5
2	0°	172815	162367	10448	6.05
3	90°	181573	157837	23736	13.07
4	90°	155225	134391	20834	13.42
5	45°	169558	133381	36177	21.34
6	45°	162553	141062	21491	13.22

Tabelle 5.1: Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 10 % igen Vordehnung der Zugprobe

Zur Erklärung der Tabellen 5.1 und 5.4: In der Spalte Walzrichtung ist die Richtung angegeben in der die Proben aus dem gewalzten Blech herausgeschnitten wurden. Die Spalte E-modul enthält den E-Modul der ursprünglichen Zugprobe. In den Spalten mit den Prozentangaben ist der E-Modul nach der angegebenen prozentualen Vordehnung aufgeführt. Ferner ist die

Vers.	Walzr.	ν_{xy}	ν_{xy} 10 %	ν_{xz}	ν_{xz} 10 %	$G_{xy} [\frac{N}{mm^2}]$	G_{xy} 10 % $[\frac{N}{mm^2}]$
1	0°	0.45736	0.47690	0.54188	0.52234	61415.88	52255.60
2	0°	0.46746	0.47222	0.53179	0.52702	55885.72	50392.73
3	90°	0.48016	0.45322	0.51909	0.54603	60469.98	53107.31
4	90°	0.21123	0.45648	0.78794	0.54276	67708.11	50937.38

Tabelle 5.2: Änderungen der Querkontraktionszahlen und der Schubmoduln, bei einer 10 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzr.	n-Wert	n-W. 10 %	R_m $[\frac{N}{mm^2}]$	R_m 10% $[\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2}$ $[\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2}$ 10 % $[\frac{N}{mm^2}]$
1	0°	0.287	0.250	478	677	276	504
2	0°	0.287	0.255	468	673	270	493
3	90°	0.422	0.264	417	649	258	461
4	90°	0.422	0.265	417	620	257	438
5	45°	0.306	0.250	416	616	251	446
6	45°	0.311	0.250	415	615	251	444

Tabelle 5.3: Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 10 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzrichtung	E-modul $[\frac{N}{mm^2}]$	E-Modul 20 % $[\frac{N}{mm^2}]$	Diff. $[\frac{N}{mm^2}]$	% Änd.
1	0°	209569	149280	60289	28.77
2	0°	198295	150879	47416	23.91
3	90°	193143	159522	33621	17.41
4	90°	198283	165482	32801	16.54
5	45°	166510	138618	27892	16.75
6	45°	170562	138753	31809	18.65

Tabelle 5.4: Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 20 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzr.	ν_{xy}	ν_{xy} 20 %	ν_{xz}	ν_{xz} 20%	$G_{xy} [\frac{N}{mm^2}]$	G_{xy} 20 % $[\frac{N}{mm^2}]$
1	0°	0.44597	0.37239	0.55328	0.62684	69626.72	56253.51
2	0°	0.44688	0.36604	0.55236	0.63320	68522.72	57897.62
3	90°	0.41999	0.35584	0.57925	0.64339	70900.42	56939.09
4	90°	0.42859	0.40730	0.57065	0.59195	69820.48	56200.14

Tabelle 5.5: Änderungen der Querkontraktionszahlen und der Schubmoduln bei einer 20 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzr.	n-Wert	n-W.20%	R_m $[\frac{N}{mm^2}]$	R_m 20% $[\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2}$ $[\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2}$ 20% $[\frac{N}{mm^2}]$
1	0°	0.295	0.127	496	659	247	536
2	0°	0.295	0.124	503	659	247	545
3	90°	0.348	0.116	578	717	257	627
4	90°	0.342	0.113	584	720	263	634
5	45°	0.312	0.119	490	659	239	555
6	45°	0.310	0.119	493	661	240	555

Tabelle 5.6: Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 20 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzrichtung	E-modul $[\frac{N}{mm^2}]$	E-Modul 30 % $[\frac{N}{mm^2}]$	Diff. $[\frac{N}{mm^2}]$	% Änd.
1	0°	163125	147963	15162	9.29
2	0°	177597	159623	17974	10.12
3	90°	185119	145318	39801	21.50
4	90°	164754	143626	21128	12.82
5	45°	166169	138612	27557	16.58

Tabelle 5.7: Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 30 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzr.	$R_m [\frac{N}{mm^2}]$	$R_m 30 \% [\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2} [\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2} 30 \% [\frac{N}{mm^2}]$
1	0°	607	723	267	686
2	0°	607	797	268	758
3	90°	537	741	256	672
4	90°	511	701	244	634
5	45°	542	723	252	663

Tabelle 5.8: Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 30 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzrichtung	E-modul $[\frac{N}{mm^2}]$	E-Modul 40 % $[\frac{N}{mm^2}]$	Diff. $[\frac{N}{mm^2}]$	% Änd.
1	0°	174544	153250	21294	12.2
2	90°	184325	155374	28951	15.7
3	45°	156327	142766	13561	8.67

Tabelle 5.9: Abnahme des E-Moduls durch Kaltverfestigung bei einer 40 % igen Vordehnung der Zugprobe

Vers.	Walzr.	$R_m [\frac{N}{mm^2}]$	$R_m 40 \% [\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2} [\frac{N}{mm^2}]$	$R_{p0.2} 40 \% [\frac{N}{mm^2}]$
1	0°	632	835	272	822
2	90°	564	808	256	766
3	45°	554	778	251	749

Tabelle 5.10: Änderung der sonstigen Materialparameter bei einer 40 % igen Vordehnung der Zugprobe

Differenz der E-Moduln sowie die prozentuale Änderung derselben aufgeführt. In den Tabellen 5.2 und 5.5 sind die Änderungen der Querkontraktionszahlen und der Schubmoduln für jeweils 2 Messungen aufgeführt. Jeweils in Walzrichtung (0° Grad) und senkrecht dazu (90° Grad). Wobei in den Spalten die gemessenen Werte ohne und mit der prozentualen Vordehnung dargestellt sind. Für eine Vordehnung von 30 % und 40 % konnten keine Querkontraktionszahlen angegeben werden, da die Zugprüfmaschine keine r -Werte für die angegebenen Vordehnungen geliefert hat und damit keine Ergebnisse berechnet werden konnten.

In den Tabellen 5.3, 5.6, 5.8 und 5.10 sind die Änderungen der anderen Materialparametern aufgeführt. Der n -Wert ist der Verfestigungsexponent, R_m die Zugfestigkeit und $R_{p0.2}$ ist die Spannung, bei der eine 0,2 % ige Dehnung nach Entlastung zurückbleibt.

Die vorherigen Messungen haben gezeigt, dass sich durch eine plastische Verformung um 20 % und eine damit verbundene Kaltverfestigung alle Materialparameter gravierend ändern. Um die Rückfederung beschreiben zu können, müssen die maximalen Spannungen, die jeder Teil des Werkstücks erfahren, hat mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes in die bleibenden Dehnungen umgerechnet werden.

5.1.2 Interpretation der Ergebnisse für die Wellrohrsimulation

Um die Rückfederung mit Hilfe der Numerik beschreiben zu können, müssen die Orientierungen der Zugproben an das Koordinatensystem, in dem das Wellrohr beschrieben wird, angepasst werden.

So entspricht der 0° Grad Richtung der Zugprobe die z -Richtung beim Wellrohr. Entsprechend ist die 90° Richtung die φ - Richtung, d.h. in Umfangsrichtung des Wellrohres.

Damit müssen die gemessenen Werte entsprechend uminterpretiert werden. Die Mittelwerte ergeben sich zu:

$$E_r = 162502 \frac{N}{mm^2} \quad E_\varphi = 162502 \frac{N}{mm^2} \quad E_z = 150080 \frac{N}{mm^2} \quad (5.1)$$

$$\nu_{z\varphi} = 0.369214 \quad \nu_{zr} = 0.630019 \quad \nu_{\varphi r} = 0.617666 \quad (5.2)$$

$$G_{rz} = \frac{(E_r + E_z)}{4(1 + \nu_{rz})} = 47941.73 \frac{N}{mm^2} \quad (5.3)$$

Mit diesen Werten kann, wenn die maximal aufgetretene Spannung bekannt ist, die elastische Dehnung, bzw. Rückfederung berechnet werden. Um eine exakte Beschreibung der Rückfederung geben zu können, wäre es nötig, die Funktion $E = E(\varepsilon)$ zu kennen. Diese ist auf theoretischem Wege jedoch nicht, bzw. nicht in genügender Genauigkeit zu ermitteln. Auf der anderen Seite ließen sich auf experimentellem Wege die Änderungen der Elastizitätsmoduln bestimmen. Um jedoch eine einigermaßen aussagekräftige Funktion zu erhalten, müssten sehr viele Messungen durchgeführt werden und diese auch noch in allen drei möglichen Orientierungen des Bleches. Dies ist mit einem vertretbaren Zeitaufwand nicht zu bewerkstelligen.

5.2 Der Kreuzzugversuch

Beim Kreuzzugversuch wird eine kreuzförmige Blechprobe (siehe Abbildung 5.4) an allen vier Enden eingespannt und zweiachsig gedehnt. Hiermit ist im Zug-Zug Spannungsbereich die Aufnahme der Fließortkurve möglich.

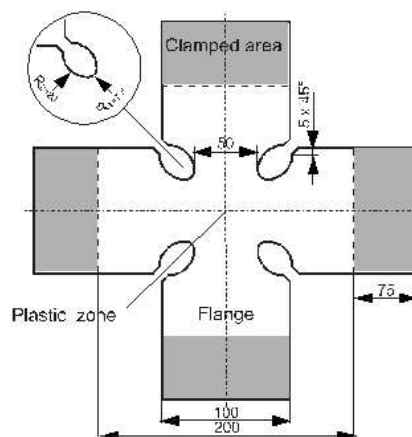


Abbildung 5.4: Kreuzzugprobe

Die Erfassung des Fließbeginns erfolgt mit Hilfe einer Infrarot-Kamera unter Ausnutzung des „Joule-Thomson-Effekts“ (Thermoelastischer Effekt). Dieser Effekt basiert darauf, dass die Werkstofftemperatur während der Umformung ein charakteristisches Verhalten zeigt, das sich durch Temperaturabfall während der elastischen und Temperaturanstieg während der plastischen Dehnung auszeichnet. Somit ist der Wendepunkt von Abfall zu Anstieg der Temperatur der Beginn des plastischen Fließens. Durch die Erfassung der Werkstofftemperatur und dem Verlauf der beiden Hauptspannungen über den jeweiligen Dehnungen kann so der Fließbeginn in der Umformzone ermittelt werden [11].

5.3 Messungen an Wellrohren

5.3.1 Gridanalyse an Wellrohren

Allgemeines

Bei der Gridanalyse wurden Rohre aus verschiedenen Stadien der Umformung bei der Herstellung eines Wellrohres untersucht. Die verschiedenen Stadien wurden nicht gezielt „eingestellt“, sondern eher per Zufall durch manuelles Stoppen des Prozesses erreicht. Bedingt durch die Charakteristik des Prozesses können an einem Rohr, das aus mehreren Wellen besteht, so

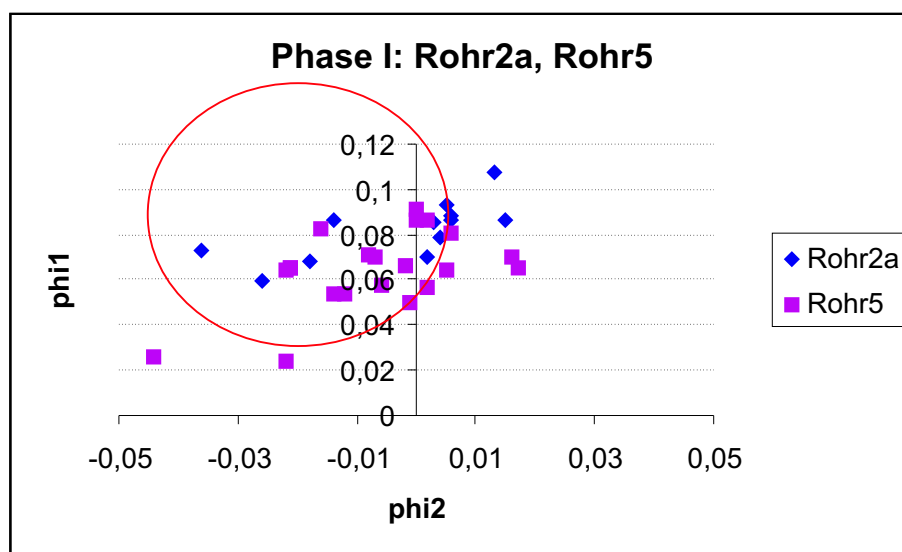


Abbildung 5.5: Logarithmische Formänderung während dem Abdichten des Rohres

viele Stadien der Umformung betrachtet werden wie Wellen entstehen. Ein Fixpunkt des Prozesses ist die reine Innenhochdruckumformung (erste Phase), bei der das Rohr innerhalb der Werkzeugteilung frei aufgeweitet wird ("angeblasen"). Der Rest des Prozesses verläuft stetig. In dieser zweiten Phase wird das Rohr von einem Ende her bei gleichbleibendem Innendruck zusammengeschoben. Der größte Teil der vermessenen Grids befindet sich jeweils am höchsten Punkt einer Welle. Zusätzlich wurden Messungen an den Seiten einer Welle durchgeführt. Dies ist aufgrund der geometrischen Verhältnisse jedoch nicht immer möglich. Wurden die Messungen auf deutlich gekrümmten Oberflächen durchgeführt, dann wurde der von den geometrischen Gegebenheiten her stammende Messfehler berechnet und der gemessene Wert entsprechend korrigiert.

Phase I:

Da es sich hier um ein reines Aufweiten handelt, wäre damit zu rechnen, dass sowohl in tangentialer als auch in axialer Richtung positive Dehnungen auftreten. Dies wird durch die Messergebnisse aber nicht bestätigt. Vielmehr befinden sich nur die auf den Wellenkämmen liegenden Grids im Bereich minimaler positiver Axialdehnung, an den Flanken liegende Grids dagegen weisen meist eine negative Axialdehnung auf. Das lässt vermuten, dass das Rohr noch vor dem Aufblasen während des Dichtvorganges eine axiale Druckkraft erfährt, die zu axialer Stauchung des Rohres führt (Abbildungen 5.5 und 5.6).

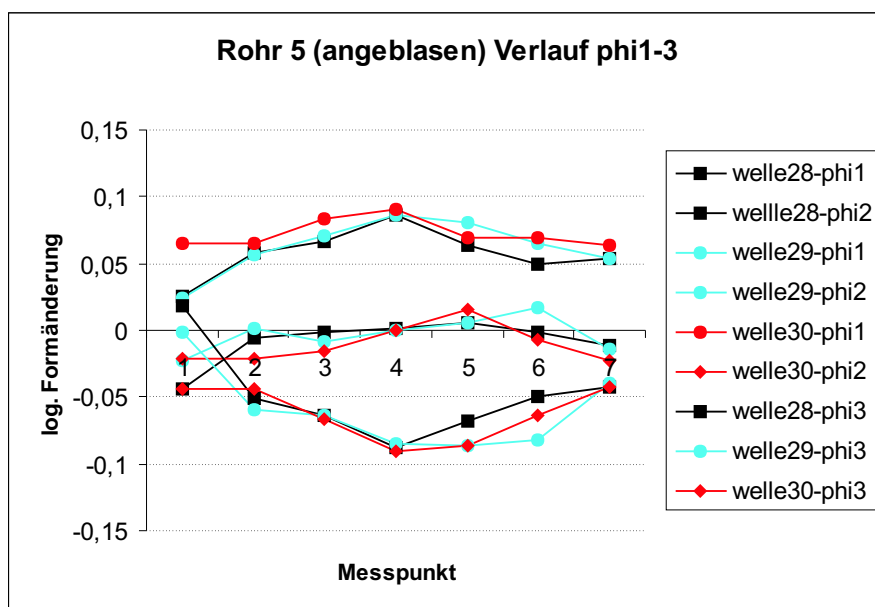


Abbildung 5.6: Logarithmische Formänderungen nach dem Anblasen des Rohres

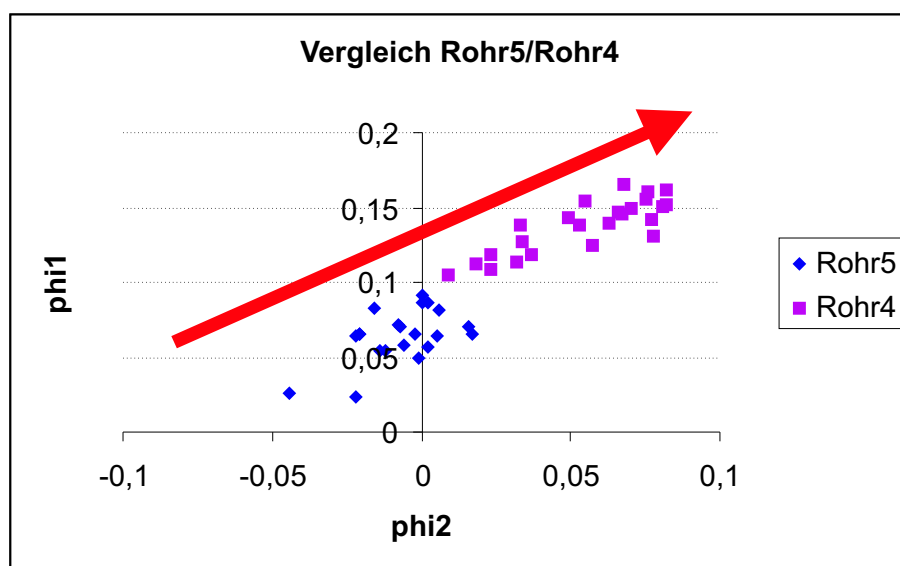


Abbildung 5.7: Verschieben der Dehnungswerte in den $+\varphi/ +\varphi$ - Bereich. Daraus folgt eine Dehnung in axialer und tangentialer Richtung

Phase II:

Für Phase II werden folgende Verhältnisse erwartet: Am durchgehend freiliegenden Wellenkamm eine ständige Zunahme der tangentialen Dehnung φ_1 wegen des zunehmenden Durchmessers. Bezüglich der axialen Dehnung φ_2 ist zu erwarten, dass sie aufgrund der axialen Schubkräfte abnimmt und die am Außenbogen auftretenden Biegespannungen zunehmen. Wie groß welcher Effekt ist, ist im Moment nicht vorhersagbar. Wegen der kleinen Wandstärke wird aber erwartet, dass die vom Biegen herrührende Zugspannung am Außenbogen von geringem Einfluss ist.

An den Flanken müssen zwei Bereiche unterschieden werden: Der Bereich, in dem der Werkstoff an der Werkzeugwandung anliegt, und der Bereich, in dem der Werkstoff frei liegt. Solange ein Bereich frei liegt, ist zu erwarten, dass φ_1 zunimmt, da der Werkstoff in Bereiche größeren Durchmessers geschoben wird. Bezüglich φ_2 ist zu erwarten, dass sich die zwei oben schon genannten Effekte der axialen Druckspannung infolge des Zusammenschiebens des Werkzeuges und der axialen Zugspannung infolge des Biegens überlagern. (Abbildung 5.7)

Sobald der Werkstoff am Werkzeug anliegt, ist damit zu rechnen, dass er in tangentialer Richtung nicht mehr oder nur noch in geringem Masse gedehnt wird. Ebenso ist anzunehmen, dass er in axialer oder besser gesagt meridionaler Richtung nicht mehr oder nur noch geringfügig gestaucht wird. Ursache dafür ist einerseits die Reibung zwischen Werkzeug und Rohrwerkstoff, andererseits die Tatsache, dass in einem solchen Fall der am Werkzeug anliegende Werkstoff zum Teil schon senkrecht zur Wirkrichtung der Axialkraft steht und so "von unten her" keine

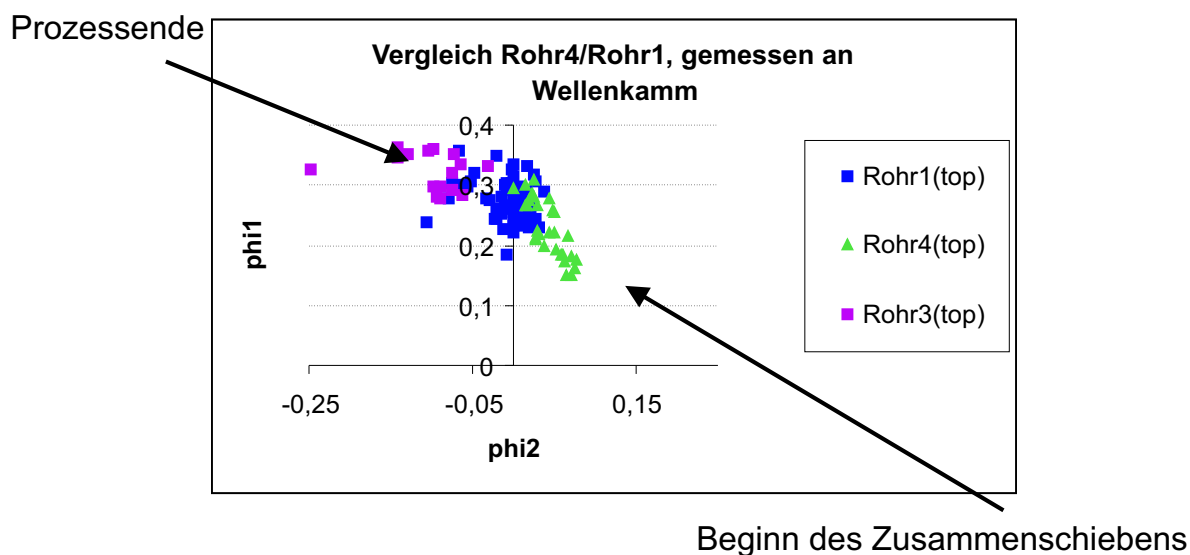


Abbildung 5.8: Entwicklung der Formänderungen auf den Wellenkämmen

meridionalen Schubkräfte wirken können. Es ist aber zu erwarten, dass von oben her noch Schubkräfte auf den Werkstoff in der Flanke wirken, da an der Oberkante der am Werkzeug anliegenden Flanke die axiale Druckkraft auf den noch frei liegenden Teil des Werkstoffes übertragen wird und der Werkstoff hier die radiale Komponente der vom Zusammenschieben herrührenden Reaktionskräfte aufnehmen muss.

Folgende Verhältnisse können dem vorliegenden Diagramm, in dem die logarithmischen Formänderungen φ_1 und φ_2 dargestellt sind, entnommen werden:

Wellenkamm:

Für die auf dem Wellenkamm befindlichen und somit immer freiliegenden Bereiche des Werkstoffes ist eine Zunahme von φ_1 zu beobachten (Abbildung 5.8). φ_1 nimmt nicht stetig zu, die Zunahme verläuft eher wellenförmig und wird zum Ende der Wellenfertigung hin schwächer, was auf die kleiner werdende freie Länge der Welle und die dadurch kleinere mögliche Durchmesserergrößerung zurückgeführt werden kann. Bezüglich der Werte von φ_2 ist gleich zu Beginn des Zusammenschiebens - sowohl im Bereich des Wellenkamms als auch an den Flanken - ein Sprung hin zu positiven Werten zu beobachten. Das bedeutet, dass zu Beginn des Zusammenschiebens axial eine weitere plastische Dehnung auftritt. Es ist anzunehmen, dass zum einen durch die axialen Druckkräfte der Werkstoff gestaucht wird, und dass zum anderen die axialen Druckkräfte das Hochbiegen der Welle bewirkt, was zu einer axialen Dehnung an der Außenseite führt. Erwartet wurde hier eher ein verschieben hin zu negativen axialen Spannungen aufgrund des axialen Zusammenschiebens. Im weiteren Verlauf ist eine ebenfalls

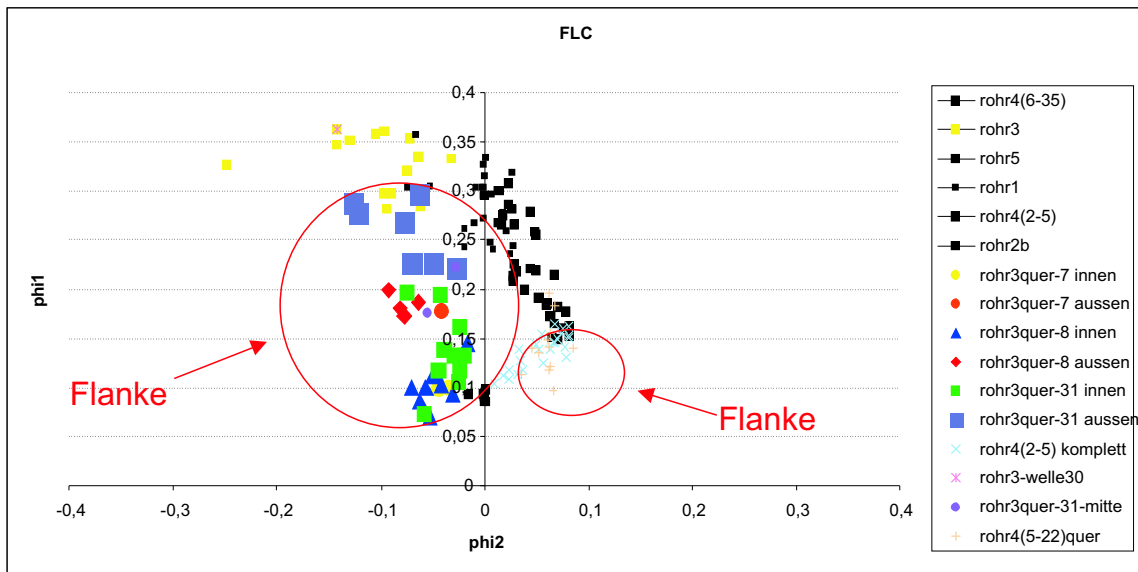


Abbildung 5.9: Entwicklung der Formänderungen auf den Wellenkämmen und auf den Flanken

wellenförmige Abnahme von φ_2 zu beobachten, die auf die infolge der axialen Druckkraft eingeleiteten axialen Druckspannungen zurückzuführen ist.

Wie in Abbildung 5.9 zu sehen ist, liegen die Werte von φ_1 erwartungsgemäß unter den Werten auf den Wellenkämmen und die Werte von φ_2 etwa gleich wie auf den Wellenkämmen

Literaturverzeichnis

- [1] W. Schönauer, T. Adolph, How We Solve PDEs, J. of Computational and Applied Mathematics 131 (2001), pp. 473-492
- [2] E. Kröner, Skript zur Vorlesung Tensoranalysis
- [3] E. Kröner, Skript zur Vorlesung Kontinuumsmechanik - (Elastostatik)
- [4] E. Becker, W. Bürger, Kontinuumsmechanik, B. G. Teubner Stuttgart, 1975
- [5] A. Sommerfeld, Mechanik der deformierbaren Medien, Verlag Harri Deutsch, 1978
- [6] R. von Mises, Göttinger Nachrichten, math.-phys. Klasse, (1913), 582
- [7] D. Banabic, D. S. Comsa, J.C. Gelin, Use of a New Yield Criterion for the Finite Element Simulation of the Hydroforming Processes
- [8] D. Banabic, e. a., A Yield Criterion for Orthotropic Sheet Metals
- [9] H. Altenbach, Werkstoffmechanik, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1993
- [10] K. Siegert, Skript zur Vorlesung "Grundlagen der Umformtechnik I"
- [11] N.N., IFU-Informationsblatt zum Kreuzzugversuch
- [12] H. Leser, C. Wizemann, W. Schönauer, M. Schmetzer, The Accurate Simulation of the Tension Test for Stainless Steel Sheet: The Plasticity Model, Institut für Umformtechnik der Universität Stuttgart, Germany, Rechenzentrum der Universität Karlsruhe
- [13] W. Schönauer, M. Schmetzer, H. Leser, C. Wizemann, The Accurate Simulation of the Tension Test for Stainless Steel Sheet: The Numerical Solution, Rechenzentrum der Universität Karlsruhe, Institut für Umformtechnik der Universität Stuttgart, Germany
- [14] H. Lippmann, Mechanik des plastischen Fließens, Springer, 1981
- [15] R. Hill, The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University Press, 1950

- [16] N. N., Beschreibung hydraulische Umformung, IWKA Regler und Kompensatoren GmbH, Karlsruhe / Stutensee

- [17] A. Bower, Lectures in Advanced Mechanics of Solids, Constitutive Law for Multiaxial Loading, Division of Engineering, Brown University, Providence RI, USA

Kapitel 6

Erfolgskontrollbericht

6.1 Förderpolitische Ziele

Vom Institut für Umformtechnik wurden die partiellen Differentialgleichungen sowie die für die Simulation benötigten Materialparameter an das Rechenzentrum der Universität Karlsruhe geliefert. Zum einen waren das die Daten für die Simulation des einachsigen Zugversuchs, der zuerst durchgeführt werden sollte um damit die Parameter zu bestimmen, die das FDEM Programm zur dann folgenden Simulation des Wellrohres benötigte. Für die Simulation des Wellrohres, die sich in verschiedene Teile gliederte, wurden weitergehende Untersuchungen durchgeführt um damit die komplette Fertigung simulieren zu können. Das waren der Druckaufbau in dem Zylinder aus dem das Wellrohr hergestellt werden soll, die Beschleunigungs- und Geschwindigkeitsbestimmung der Maschine, die das Wellrohr herstellt und zuletzt die Materialdaten die für die Beschreibung der Rückfederung, bei Entnahme des fertigen Wellrohres aus dem Umformwerkzeug, nötig waren.

6.2 Das wissenschaftliche-technische Ergebnis

Die gewonnenen Erkenntnisse machen es möglich einen beliebigen technischen Prozess, ganz analog zu den durchgeführten Arbeiten, in viele kleine Einzelschritte zu zerlegen, die entsprechenden Differentialgleichungen aufzustellen und dann mit dem FDEM Computerprogramm den entsprechenden Vorgang zu simulieren. Damit hat das FDEM Programm den Vorteil gegenüber herkömmlichen FEM Programmen, dass sich damit beliebig komplizierte Probleme mit einem einzigen Programm behandeln lassen, während die zur Zeit verfügbaren FEM Programme speziell für die an sie gestellten Anforderungen geschrieben worden sind. So gibt es FEM Programme die nur zur Beschreibung von Tiefzieh-, Hydroumform- oder Massivumformprozessen eingesetzt werden können, jedoch kaum Programme die in allen technischen und naturwissenschaftlichen Bereichen benutzt werden können.

6.3 Fortschreibung des Verwertungsplans

Die weitergehenden Arbeiten in dem Bereich der Finiten Differenzen Methode sollten sich auf eine benutzerfreundliche Eingabemöglichkeit für die Gleichungen und die entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen in das Computerprogramm beschäftigen.

6.4 Arbeiten die zu keinem Erfolg führten

Die Ansätze für die Fließbedingung zur Beschreibung der plastischen Verformung, die in den ersten Zwischenberichten aufgeführt worden sind, waren mit dem FDEM Programm nicht lösbar, da das Newton-Raphson Verfahren nicht konvergierte und damit keine Lösung zu erhalten war. Der Grund dafür war nicht nachvollziehbar lag aber wahrscheinlich an der extremen Nichtlinearität des Materialmodells.

6.5 Präsentationsmöglichkeiten

Die Präsentationsmöglichkeiten für Ergebnisse die das Finite Differenzen Programm liefert, sind im Prinzip dieselben wie es die herkömmlichen FEM Programme auch liefern.

6.6 Die Ausgaben und Zeitplanung

Aufgrund der Probleme mit den ersten Materialmodellen und der damit verbundenen Zeitverzögerung, da die Implementation von einem neuen Modell in das FDEM Programm bis zu ca. drei Monaten dauerte, ergab sich eine Verzögerung in der Zeitplanung.

Die Ausgaben für das Projekt hielten sich an die beantragten Kosten, da in der Hauptsache Personalkosten abzudecken waren und diese sich nicht änderten.

Liste der Veröffentlichungen

H. Leser, C. Wizemann, W. Schönauer, M. Schmetzer: The Accurate Simulation of the Tension Test for Stainless Steel Sheet: The Plasticity Model, Institut für Umformtechnik der Universität Stuttgart, Holzgartenstr. 17, D-70174 Stuttgart, Germany, Rechenzentrum der Universität Karlsruhe, D-76128 Karlsruhe, Germany, WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics, Wien, Österreich, 7.-12. Juli 2002. On-line-publication, ISBN 3-9501554-0-6

W. Schönauer, M. Schmetzer, H. Leser, C. Wizemann: The Accurate Simulation of the Tension Test for Stainless Steel Sheet: The Numerical Solution, Rechenzentrum der Universität Karlsruhe, D-76128 Karlsruhe, Germany, Institut für Umformtechnik der Universität Stuttgart, Holzgartenstr. 17, D-70174 Stuttgart, Germany, WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics, Wien, Österreich, 7.-12. Juli 2002. On-line-publication, ISBN 3-9501554-0-6